ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KIM TOÀN

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học : TS. Nguyễn Văn Ngọc

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài luận văn

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề khó của toán học sơ cấp, đòi hỏi tính tư duy và tính sáng tạo cao. Trong chương trình chuyên toán của các trường THPT chuyên thì bất đẳng thức là một chuyên đề quan trọng. Các bài toán liên quan đến bất đẳng thức cũng là những bài toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp quốc gia, khu vực và quốc tế.

Các bài toán về bất đẳng thức khá đa dạng và có thể chứng minh bằng nhiều phương pháp khác nhau trong đó phương pháp sử dụng đạo hàm là một công cụ hữu hiệu.Tuy nhiên, các bất đẳng thức đạo hàm hiện nay còn ít được quan tâm và giới thiệu trong các tài liệu bằng Tiếng Việt.

Bởi vậy việc sưu tầm, tuyển chọn, khai thác về một số bất đẳng thức đạo hàm một biến như: các định lý trung bình, sự tăng giảm của hàm số, hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số, công thức Taylor, công thức tính đạo hàm cấp n, là rất cần thiết cho công tác giảng dạy và học tập toán học ở bậc phổ thông.

Trên cơ sở các bất đẳng thức đạo hàm đó, có thể vận dụng vào giải quyết một lớp các bài toán khó như: chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, giải bất phương trình. Đó là những dạng toán được đề cập nhiều trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp quốc gia, Olympic toán quốc tế.

Bên cạnh những bất đẳng thức đạo hàm kể trên thì vẫn còn khá nhiều bất đẳng thức đạo hàm khó hơn, được giới thiệu chưa nhiều bằng tiếng việt như: bất đẳng thức Landau-Hadamard; bất đẳng thức Glaeser, bất đẳng thức Markov-Bernstein và một số bất đẳng thức khác liên quan đến hàm lồi. Đây là những bất đẳng thức khó còn ít được quan tâm, chỉ xuất hiện rải rác trong một số tài liệu.

Vì vậy việc giới thiệu các bất đẳng thức đạo hàm này là cần thiết cho công tác giảng dạy và học tập toán học ở bậc phổ thông.

2. Mục đích nghiên cứu luận văn

Sưu tầm, giới thiệu, hệ thống hóa và phân loại một số bất đẳng thức đạo hàm một biến số để áp dụng vào giải các bài toán sơ cấp khó, hay gặp trong các kì thi vào lớp chuyên, thi đại học, thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic toán quốc tế như: Chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, giải bất phương trình.

Bên cạnh đó giới thiệu một số bất đẳng thức đạo hàm khó hơn chưa được giới thiệu nhiều trong các tài liệu Tiếng Việt như: bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaeser, bất đẳng thức Markov-Bernstein và một số bất đẳng thức khác liên quan đến hàm lồi.

3. Bố cục của luận văn

Bản luận văn "Một số bất đẳng thức đạo hàm và ứng dụng gồm có: mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số bất đẳng thức đạo hàm cơ bản

Trong chương này trình bày các định lý trung bình, định lý Rolle, định lý Lagrange, định lý Cauchy, sự tăng giảm của hàm số, hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số, công thức Taylor - bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaese, bất đẳng thưc Markov-Bernstein công thức tính đạo hàm cấp n và một số bất đẳng thức đạo hàm khác của đa thức.

Chương 2. Ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức,giải phương trình,bất phương trình

Trong chương này trình bày những ứng dụng của các bất đẳng thức đạo hàm trong việc giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của

TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K4 Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong nhận được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 09 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Kim Toàn

Chương 1

Một số bất đẳng thức đạo hàm của hàm một biến

1.1 Các định lý trung bình

1.1.1 Lý thuyết tóm tắt

Trong mục này trình bày một số định lý trung bình vi phân, được biết đến trong nhiều tài liệu về toán bằng Tiếng Việt.

Định lý 1.1. *(Định lý Rolle) Giả sử hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b]; có đạo hàm trên khoảng (a,b) và f(a) = f(b) thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$ *sao cho f'(ξ) = 0.*

Định lý 1.2. *(Định lý Lagrange) Nếu hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b] và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$*, sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Định lý 1.3. *(Định lý Cauchy) Nếu các hàm f(x), g(x) đồng thời xác định, liên tục trên đoạn [a,b] và có đạo hàm trên khoảng (a,b), với g'(x)* $\neq 0, \forall x \in (a, b)$ *và* $g(a) \neq g(b)$ *thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$ *sao cho:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

1.1.2 Các bài toán

Trong phần này trình bày một số bài toán chứng minh bất đẳng thức. Đây là những bài toán khó, ở dạng tổng quát, sử dụng các định lý trung bình để chứng minh.

Bài toán 1.1. *Cho hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b], có đạo hàm hữu hạn trong khoảng (a,b). Ngoài ra f không tuyến tính. Khi đó trong khoảng (a,b)* *tồn tại ít nhất một điểm c, sao cho*

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

▼**Lời giải** Chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bất kì bởi các điểm

$$a = x_o < x_1 < x_2 < .. < x_n = b.$$

Ta nhận được:

$$\Big|f(b)-f(a)\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))\Big| \le \sum_{i=0}^{n-1}\Big|f(x_{i+1})-f(x_i)\Big|.$$

Theo công thức Lagrange, ta có

$$f(x_{i+1})-f(x_i) = f'(\xi_i)\triangle x_i,\ x_i < \xi_i <\ x_{i+1}, \triangle x_i = x_{i+1} - xi.$$

Do đó ta có

$$|f(b)-f(a)| \le \sum_{i=0}^{n-1}|f'(\xi)|\triangle x_i.$$

Vì hàm $f(x)$ không tuyến tính, nên tồn tại một phân hoạch đoạn $[a,b]$ sao cho trong các số $|f'(\xi)|$ tồn tại một số lớn nhất, khác không. Kí hiệu số đó là $|f'(c)|$. Khi đó ta nhận được bất đẳng thức

$$|f(b)-f(a)| < |f'(c)|\sum_{i=0}^{n-1}\triangle x_i = (b-a)|f'(c)|, a < c < b.$$

Từ đó suy ra

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Ta có đpcm.

Bài toán 1.2. *Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 hữu hạn trên đoạn $[a,b]$, thỏa mãn điều kiện $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng trong khoảng (a,b) tồn tại ít nhất một điểm c, sao cho*

$$f''(c) \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

▼**Lời giải** Nếu $f(x) = const$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Giả sử $f(x) \neq const$. Từ điều kiện $f'(a) = f'(b) = 0$, suy ra $f(x)$

không tuyến tính. Áp dụng công thức Cauchy về số gia hữu hạn cho các hàm số $f(x)$ và $\phi(x) = \dfrac{(x-a)^2}{2}$ trên đoạn $\left[a, \dfrac{(a+b)}{2}\right]$ và cho các hàm số $f(x)$ và $\gamma(x) = \dfrac{(b-x)^2}{2}$ trên đoạn $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, ta nhận được

$$\frac{8\Big[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\Big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a}, \qquad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}.$$

$$\frac{8\Big[f(b) - f(\frac{a+b}{2})\Big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}, \qquad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$\frac{8\big[f(b) - f(a)\big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}.$$

Vì $f'(a) = f'(b) = 0$, nên vế phải của đẳng thức cuối cùng có thể viết dưới dạng:

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = f''(\eta_1) - f''(\eta_2),$$

trong đó

$$a < \eta_1 < \xi_1; \qquad \xi_2 < \eta_2 < b.$$

Từ đó suy ra

$$\Big|\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}\Big| \leq |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|.$$

Kí hiệu:

$$f''(c) = max\{|f''(\eta_1)|; |f''(\eta_2)|\}.$$

Khi đó ta có

$$\Big|\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}\Big| \leq 2|f''(c)|.$$

Từ đó suy ra đpcm. Dấu đẳng thức không loại trừ vì có thể có trường hợp $|f''(\eta_1)| = |f''(\eta_2)|$.

Bài toán 1.3. *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, +\infty)$ và hơn nữa, $f'(x) > k = const > 0, \forall x > a$. Chứng minh rằng, $f(a) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm thực trong khoảng $\Big(a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}\Big)$.*

▼**Lời giải:** Áp dụng Định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}]$ ta có:

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) - f(a) = f'\Big(a + \theta\frac{|f(a)|}{k}\Big).\frac{|f(a)|}{k}, 0 < \theta < 1.$$

Từ điều kiện $f'(x) > k > 0$, ta tìm được:

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) - f(a) > |f(a)|,$$

Suy ra

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) > |f(a)| + f(a) = -f(a) + f(a) = 0.$$

Hàm $f(x)$ trên các đầu mút của đoạn $\big[a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}\big]$ nhận các giá trị trái dấu, nên theo Định lý Cauchy về giá trị trung gian tồn tại $\xi \in (a, a + \dfrac{|f(a)|}{k})$, sao cho $f(\xi) = 0$. Ta sẽ chứng minh điểm ξ đó là duy nhất. Thật vậy giả sử trên khoảng đó còn tìm được ξ_1, sao cho $f(\xi_1) = 0$. khi đó theo định lý Rolle, trên (ξ, ξ_1) nếu $(\xi < \xi_1)$ hay trên khoảng (ξ_1, ξ), nếu $(\xi_1 < \xi)$ tìm được ξ_2, sao cho $f'(\xi_2) = 0$. Điều đó trái với giả thiết là $f'(x) > k > 0$ khi $x > a$.

Bài toán 1.4. *a, Giả sử hàm $f(x)$ khả vi liên tục n lần trên [a,b] và trên đoạn này có không ít hơn n không điểm (nghiệm của phương trình f(x)=0) tính cả bội .*
Chứng minh rằng:

$$\max_{[a,b]}|f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!}\max_{[a,b]}|f^{(n)}(x)|.$$

b, Hàm $f(x) \in \mathbb{C}^2[0,1]$ có không ít hơn 2 nghiệm trên [0,1] (kể cả bội), ngoài ra $|f''(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$. Số $\max\limits_{[0,1]}|f(x)|$ sẽ như thế nào ?

▼**Lời giải:** a, Bằng quy nạp theo $k \geq 0$ ta sẽ chứng minh điều khẳng định sau:

Định lý Rolle tổng quát: Nếu $f \in \mathbb{C}^k[a,b]$ và f có không ít hơn (k+1)

không điểm (kể cả bội) trên đoạn [a,b] thì $f^{(k)}$ có ít nhất một không điểm trên [a,b].
Với k=0 điều khẳng định là hiển nhiên.
Giả sử định lý đúng với k-1. Ta chứng minh định lý đúng với k.
Giả sử $x_1, x_2, ..., x_l$ là những nghiệm khác nhau của hàm f trên $[a, b]$ có các bội tương ứng là $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_l$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_l \geq k + 1$ và $x_1 < x_2 < ... < \alpha_l$. Khi đó $f'(x)$ có nghiệm x_j bội $\alpha_j - 1$(nếu $\alpha_j > 1$) và ngoài ra theo định lý Rolle còn có ít nhất $l - 1$ nghiệm trên khoảng $(\alpha, \alpha_{j+1}), j = 1, 2, ..., l - 1$. Tóm lại số nghiệm của $f'(x)$ trên [a,b] không vượt quá:

$$\sum_{j=1}^{l} (\alpha_j - 1) + l - 1 \geq k - l + 1 - l - 1 = k.$$

Bây giờ, còn lại ta áp dụng giả thiết quy nạp cho f' với $k - 1$. Định lý được chứng minh.

Ta kí hiệu $x_1, x_2, .., x_n$ là n không điểm của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ ở đây giữa các số này có thể trùng nhau, mỗi nghiệm của f có thể lặp lại s lần nếu bội của nó không ít hơn s. Giả sử $x_0 \in [a, b]$ tùy ý và khác với $x_1, x_2, ..x_n$. Xét đa thức bậc n:

$$P(x) = f(x_0). \frac{\prod_{j=1}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - P(x)$. Hàm $g(x)$ có các nghiệm là $x_0, x_1, ..., x_n$. Nếu số $x_j (j \geq 1)$ nằm trong dãy $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ s lần thì bội của nghiệm x_j không ít hơn s. Vì vậy áp dụng định lý Rolle tổng quát thì $g^{(n)}$ có ít nhất một nghiệm $x' \in [a, b]$.
Ta có

$$0 = g^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - p^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - \frac{n! f(x_0)}{\prod_{j=1}^{n} (x_0 - x_j)}.$$