ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỒNG THỊ HỒNG NGỌC

ĐA THỨC HILBERT VÀ BỘI

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Mã số: 60.46.05

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2012

Công trình được hoàn thành tại

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên .../.../2012

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Ngày .... tháng .... năm 2012

Có thể tìm hiểu tại

Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành trong khóa 18 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường, Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, khoa Sau đại học trường Đại học Sư phạm đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã động viên, ủng hộ tôi cả về vật chất và tinh thần để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Mở đầu

Cho A là một vành Artin, $B = A[x_1, \ldots, x_m]$ là vành đa thức m biến với hệ số trong A. Khi đó B là một vành phân bậc với cấu trúc phân bậc tự nhiên. Nếu $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ là một B-môđun phân bậc hữu hạn sinh thì M_n là một A-môđun và $\ell_A(M_n) < \infty$. Hơn nữa, với n đủ lớn thì $\ell_A(M_n)$ là một đa thức với hệ số hữu tỷ. Kết quả này là nội dung của Định lý đa thức Hilbert. Đa thức Hilbert đóng một vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học đại số, nó cho phép chúng ta nghiên cứu cấu trúc của một môđun M thông qua những đại lượng số cụ thể như bậc và hệ số của đa thức này.

Một iđêan $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ của vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$ được gọi là iđêan tham số của M nếu $\mathfrak{q}$ là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và sinh bởi d phần tử, trong đó $d = \dim M$, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi tồn tại iđêan tham số $\mathfrak{q}$ sao cho $\ell_R(M/\mathfrak{q}M) = e(\mathfrak{q}, M)$, với $e(\mathfrak{q}, M)$ là số bội của môđun M đối với $\mathfrak{q}$. Nếu $\operatorname{Sup}\{\ell_R(M/\mathfrak{q}M) - e(\mathfrak{q}, M)\} < \infty$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy khắp trên tập các iđêan tham số của R thì M được gọi là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Như vậy, các lớp môđun quan trọng quen thuộc trong Đại số giao hoán đều được đặc trưng qua lý thuyết bội và hàm độ dài.

Mục đích chính của luận văn là trình bày lại và chứng minh chi tiết Định lý đa thức Hilbert trên vành Noether cùng với một số tính chất của nó về bậc đa thức, hệ số cao nhất (số bội). Thông qua số bội trình bày một số đặc trưng của lớp môđun Cohen-Macaulay và môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Đại số phân bậc. Trình bày một số khái niệm ban đầu về vành và môđun phân bậc, Định lý Artin-Rees và các hệ quả với mục đích phục vụ chương 2 là chương chính của luận văn.

Chương 2: Đa thức Hilbert và số bội. Trình bày lại định lý Đa thức Hilbert trên vành Noether (không đòi hỏi là địa phương).

Tiếp theo là trình bày về bậc của Đa thức Hilbert trên vành Noether địa phương. Đây là nội dung quan trọng trong toàn bộ luận văn để thông qua đó nghiên cứu các tính chất có liên quan về hệ tham số và số bội.

Trình bày một số đặc trưng của môđun Cohen-Maccaulay, môđun Cohen-Maccaulay suy rộng thông qua lý thuyết bội và hàm độ dài.

Các nội dung được trình bày trong luận văn dựa trên bài giảng của GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường và hai cuốn tài liệu tham khảo chính là: *"Commutative Ring Theory"* của H.Matsumura và *"Lessons on rings, modules and multiplicities"* của D. Northcott.

Với mong muốn hệ thống lại một số nội dung quan trọng về đa thức Hilbert và ứng dụng của nó trong việc nghiên cứu các lớp môđun quan trọng trong Đại số giao hoán, tuy nhiên, vì điều kiện thời gian, năng lực, kinh nghiệm bản thân còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các quý thầy cô và các bạn học viên cùng độc giả quan tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2012.

Tác giả

ĐỒNG THỊ HỒNG NGỌC

Chương 1

Đại số phân bậc

1.1 Kiến thức chuẩn bị

Các khái niệm cơ bản về vành, môđun Artin và Noether coi như đã biết. Mục này trình bày lại định nghĩa về độ dài môđun, chiều của vành và môđun. Những vấn đề này là cơ sở để chúng ta nghiên cứu đa thức Hilbert và số bội ở những mục sau.

Ta luôn kí hiệu R là vành giao hoán Noether và M là môđun của R.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Cho M là R-môđun, $M \neq 0$. M được gọi là *môđun đơn* nếu nó không có môđun con nào ngoài 0 và M.

(ii)Cho M là R-môđun, dãy các môđun con của M

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = 0$$

được gọi là *chuỗi hợp thành* của M nếu mọi môđun M_i/M_{i+1} là đơn.

Khi đó r được gọi là *độ dài của chuỗi hợp thành* của M hay *độ dài của* M và kí hiệu là $\ell_R(M)$.

Nếu M không có chuỗi hợp thành thì $\ell_R(M) = \infty$.

Chú ý 1.1.2. (a) [1, Định lý 7.41]. Cho dãy khớp ngắn các R-môđun

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0.$$

Khi đó ta có $\ell_R(M_2) = \ell_R(M_1) + \ell_R(M_3)$.

(b) [3]. Một cách tổng quát, cho

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$$

là dãy khớp các R-môđun có độ dài hữu hạn. Khi đó $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i \ell_R(M_i) = 0$.

(c) [3]. Cho R là một vành, B và C là hai R-môđun. Khi đó $\ell_R(B \oplus C) = \ell_R(B) + \ell_R(C)$.

Định nghĩa 1.1.3. (i) Một dãy giảm các iđêan nguyên tố

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq \mathfrak{p}_{n-1} \supsetneqq \mathfrak{p}_n$$

được gọi là *xích nguyên tố* trong R và n được gọi là *độ dài* của xích đó.

(ii) Chặn trên đúng của độ dài tất cả các xích nguyên tố trong R gọi là *chiều Krull của vành* R (còn gọi là *chiều của vành*) và kí hiệu là $\dim R$.

(iii) Cho M là R-môđun. *Chiều Krull của* M, kí hiệu là $\dim M$, và được xác định bởi $\dim M = \dim(R/\mathrm{Ann}_R M)$.

Chú ý 1.1.4. (a) [3]. Nếu $R = \mathbb{Z}$ thì $\dim \mathbb{Z} = 1$.

(b) [3]. Cho k là một trường và $R = k[x]$. Khi đó $\dim(k[x]) = 1$.

(c) [4, Định lý 15.4]. Cho R là vành bất kì, khi đó $\dim R[x_1, \ldots, x_n] = \dim R + n$.

1.2 Vành và môđun phân bậc

Định nghĩa 1.2.1. Một *vành phân bậc* là một vành R cùng với một họ các nhóm con $(R_n)_{n \geq 0}$ của nhóm cộng R sao cho

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n \text{ và } R_n R_m \subseteq R_{n+m};\ \forall\, n, m \geq 0.$$

Khi đó, ta có $R_0 R_0 \subseteq R_0$ và $R_0 R_n \subseteq R_n$. Do vậy R_0 là một vành con của vành R và R_n là một R_0-môđun.

Định nghĩa 1.2.2. Cho R là một vành phân bậc, một R-*môđun phân bậc* là một R-môđun M cùng với một họ các môđun con $(M_n)_{n\geq 0}$ của M sao cho

$$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n \text{ và } R_n M_m \subseteq M_{n+m}, \forall n, m \geq 0.$$

Do $R_0 M_n \subseteq M_n$ nên mỗi M_n là một R_0-môđun.

Định nghĩa 1.2.3. Cho M là một R-môđun phân bậc. Phần tử $x \in M$ được gọi là *thuần nhất* nếu x thuộc một M_n nào đó và n được gọi là *bậc* của x. Mỗi phần tử $x \in M$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng hữu hạn của các thành phần thuần nhất

$$x = x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k}, \quad x_{n_i} \in M_{n_i}, \forall\, i = \overline{1, k}.$$

Định nghĩa 1.2.4. (i) Cho $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ là môđun phân bậc trên vành phân bậc $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$. Một môđun con N của M được gọi là *môđun con phân bậc (môđun con thuần nhất)* nếu $N = \bigoplus_{n\geq 0}(N \cap M_n)$.

(ii) Cho I là iđêan của vành phân bậc $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$. I được gọi là *iđêan phân bậc (iđêan thuần nhất)* nếu $I = \bigoplus_{n\geq 0}(I \cap R_n)$.

Sau đây là tiêu chuẩn để một môđun con trong vành phân bậc là phân bậc.

Mệnh đề 1.2.5. *Cho $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ là môđun phân bậc trên vành phân bậc $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$. Cho N là môđun con của M. Khi đó N là môđun con phân bậc khi và chỉ khi với $\forall\, x \in N$ thì mọi thành phần thuần nhất của x cũng thuộc N, tức là nếu $x \in N : x = x_i + \cdots + x_{i+k}$ thì $x_j \in N, \forall\, j = \overline{i, i+k}$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử N là môđun con phân bậc của M, khi đó $N = \bigoplus_{n\geq 0}(N \cap M_i)$ $(*)$. Lấy tùy ý $x \in N$, từ $(*)$ ta có $x = x_i + \cdots + x_{i+k}; x'_i \in (N \cap M_i), \forall\, i' = \overline{i, i+k}$. Vậy $x'_i \in N, \forall\, i' = \overline{i, i+k}$.

($\Leftarrow$) Giả sử $\forall\, x \in N$ đều có tính chất là nếu $x = x_i + \cdots + x_{i+k}$ với $x_j \in M_j, \forall\, j = \overline{i, i+k}$ thì $x_j \in N, \forall\, j = \overline{i, i+k}$. Ta chứng minh N phân bậc, tức là chứng minh $N = \bigoplus_{j \geq 0} (N \cap M_j)$. Thật vậy, ta có $\bigoplus_{j \geq 0} (N \cap M_j) \subseteq N$. Ngược lại, lấy $x \in N$ thì $x \in M$, khi đó $x = x_i + \cdots + x_{i+k}$ với $x_j \in M_j, \forall\, j = \overline{i, i+k}$. Theo trên ta có $x_j \in N$, do đó $x_j \in N \cap M_j$. Vậy $x \in \bigoplus_{j \geq 0} (N \cap M_j)$. Vậy $\bigoplus_{j \geq 0} (N \cap M_j) = N$. □

Với kí hiệu như trong mệnh đề trên ta có hệ quả trực tiếp như sau:

Hệ quả 1.2.6. [3].*N là môđun con phân bậc của M khi và chỉ khi N có một hệ sinh gồm toàn các phần tử thuần nhất.*

Tương tự ta cũng có tiêu chuẩn để một iđêan trong vành phân bậc là phân bậc.

Mệnh đề 1.2.7. [3]. *Cho $I = \bigoplus_{n \geq 0} (I \cap R_n)$ là iđêan của vành phân bậc $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$.Khi đó I là iđêan phân bậc khi và chỉ khi với $\forall\, x \in I$ thì mọi thành phần thuần nhất của x cũng thuộc I, tức là nếu $x \in I : x = x_i + \cdots + x_{i+k}$ thì $x_j \in N, \forall\, j = \overline{i, i+k}$.*

Hệ quả 1.2.8. [3]. *I là iđêan phân bậc của R khi và chỉ khi I có một hệ sinh gồm toàn các phần tử thuần nhất.*

Định nghĩa 1.2.9. Cho M, N là các R-môđun phân bậc. Một *R-đồng cấu môđun phân bậc* là một R-đồng cấu môđun $f : M \to N$ sao cho $f(M_n) \subseteq N_n, \forall\, n \geq 0$, trong đó $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ và $N = \bigoplus_{n \geq 0} N_n$.

Ví dụ 1.2.10. a) Mọi vành R đều có thể xem là vành phân bậc với phân bậc tầm thường $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$, trong đó $R_0 = R$ và các $R_n = 0$, $\forall\, n > 0$.

b) Vành đa thức $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, với k là một trường có cấu trúc phân bậc tự nhiên $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$, trong đó $R_0 = k$ và $R_n = \{f \in R | f$ là đa thức thuần nhất bậc $n\}$.