ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

VŨ HUY BÌNH

PHƯƠNG PHÁP RUNGE-KUTTA GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 .46 .01 .12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN - 2012

Công trình được hoàn thành tại

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Nguyễn Văn Minh**

Phản biên 1: **TS. Nguyễn Anh Tuấn**

Phản biên 2: **TS. Nguyễn Thị Thu Thủy**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Ngày 18 tháng 11 năm 2012

Có thể tìm hiểu luận văn tại

Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

MỞ ĐẦU

Hệ phương trình vi phân đại số là lớp phương trình có ý nghĩa ứng dụng thực tế cao, xuất hiện trong lý thuyết điều khiển, mô phỏng mạch điện, phản ứng hóa học những vấn đề trong điều khiển đòi hỏi chúng ta phải quan tâm giải quyết những hệ phương trình dạng:
$A(t)x' + B(t)x + f(t) = 0$ trong đó A, B là những ma trận hằng hoặc ma trận hàm liên tục cấp n, $detA(t) = 0$, gọi là hệ phương trình vi phân đại số (chú ý rằng nếu $\det \mathrm{A}(t) \neq 0$ thì đưa về dạng: $x' = -A^{-1}B(x)$ là phương trình vi phân thường). Lý thuyết phương trình vi phân thường đã được Newton-Leibnitz xây dựng vào cuối thế kỷ 17 đã được nghiên cứu, phát triển mở rộng theo nhiều hướng và thu được nhiều kết quả hoàn chỉnh.
Hệ phương trình vi phân đại số đóng vai trò rất quan trọng trong các lĩnh vực như: Toán hoc, kĩ thuật, vật lí, kinh tế và một số ngành khác. Nội dung của luận văn nhằm giải quyết hai vấn đề chính:
Vấn đề 1: Những khái niệm cơ bản của hệ phương trình vi phân đại số.
Vấn đề 2: Đưa ra phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng phương trình vi phân đại số và ứng dụng của phương pháp này giải bài toán cụ thể.
Luận văn này được chia làm ba chương.
Chương 1: Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình vi phân đại số.
Nội dung chương 1 trình bày tóm tắt một số kết quả đã biết của phương trình vi phân thường, một số khái niệm về hệ phương trình vi phân đại số: Chỉ số, nghiệm, phân loại, bài toán cơ bản dẫn đến hệ phương trình vi phân đại số.
Chương 2: Phương pháp Runge-Kutta giải gần đúng hệ phương trình vi phân đại số.
Nội dung chương 2 nhắc lại phương pháp số để giải gần đúng phương trình vi phân thường, phương pháp số cho hệ phương trình vi phân đại số trong đó có phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số, cách tiếp cận mới của phương pháp Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân đại số.

Chương 3: Thực hiện với ví dụ cụ thể.
Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để tác giả hoàn thiện luận văn của mình. Tác giả xin trân trọng cảm ơn tới Ban Giám hiệu, các thầy cô giáo trường Đại học Khoa học- Đại hoc Thái Nguyên. Những thầy cô đã tận tình dạy bảo cho tác giả trong suốt thời gian học. Đã trang bị cho tác giả và tập thể lớp những kiến thức và tạo mọi điều kiện cho lớp học tập tại trường.
Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 09 năm 2012

Tác giả

Vũ Huy Bình

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

1.1 Một số khái niệm về phương trình vi phân thường cấp 1

1.1.1 Vài mô hình đơn giản

Sự rơi tự do: Xét một vật có khối lượng m được thả rơi tự do trong khí quyển gần mặt đất. Theo định luật II Newton, chuyển động của vật thể đó có thể mô tả bởi phương trình

$$F = ma \tag{1.1.1}$$

Trong đó F là hợp lực tác động lên vật và a là gia tốc chuyển động. Hợp lực F có thể giả thiết chỉ bao gồm lực hấp dẫn (tỷ lệ với khối lượng của vật và hướng xuống) và lực cản (tỷ lệ với vận tốc chuyển động và hướng lên trên). Ngoài ra do gia tốc chuyển động $a = \dfrac{dv}{dt}$ nên (1.1.1) có thể viết dưới dạng

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v. \tag{1.1.2}$$

Trong đó $g \approx 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường, còn α là hệ số cản.
Vậy vận tốc v của vật rơi tự do thỏa mãn phương trình (1.1.2) với sự xuất hiện của đạo hàm của v. Những phương trình như vậy gọi là phương trình vi phân.

Dung dịch hóa học: Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = t_0$ một thùng chứa x_0 kg muối hòa tan trong 1000 lít nước. Ta cho chảy vào thùng một loại nước muối nồng độ a (kg/lít) với lưu lượng r (lít/phút) và khuấy đều. Đồng thời cho hỗn hợp đó chảy ra khỏi thùng cũng với tốc độ như trên. Gọi $x = x(t)$ là lượng muối trong thùng tại thời điểm bất kỳ. Rõ ràng tỷ lệ thay đổi lượng muối trong thùng $\frac{dx}{dt}$ bằng hiệu của tỷ lệ muối chảy vào (kg/phút) trừ đi tỷ lệ muối chảy ra tại thời điểm đang xét $\frac{rx}{1000}$. (kg/phút). Vậy ta có phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{ar} - \frac{rx}{1000} \tag{1.1.3}$$

với dữ kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$

1.1.2 Một số khái niệm

Phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1.4}$$

Trong đó $y = y(x)$ là ẩn hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (đến cấp nào đó) của ẩn.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là hàm nhiều biến (xuất hiện các đạo hàm riêng) thì phương trình vi phân còn gọi là phương trình đạo hàm riêng. Để phân biệt người ta thường gọi phương trình với ẩn hàm là hàm một biến là phương trình vi phân thường là đối tượng chính được nói trong mục này.

Thông thường ta xét các phương trình với ẩn hàm là hàm số một biến thực $y = y(x)$ xác định trên khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$, khi đó hàm F trong đẳng thức trên xác định trong một tập mở G của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là véc tơ hàm (hàm với giá trị véc tơ) $y(x) = (y_1(x), ..., y_m(x))^T \in \mathbb{R}^m$, F là một ánh xạ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^m$ và (1.1.4) được hiểu là hệ phương trình vi phân.

Ta nói một phương trình vi phân có cấp n nếu n là cấp lớn nhất của đạo hàm ẩn xuất hiện trong phương trình.

Phương trình vi phân thường cấp I có dạng tổng quát $F(x, y, y') = 0$ trong đó $F(x, y, y')$ được giả thiết là liên tục với các đạo hàm riêng của nó trên miền $G \subset \mathbb{R}^3$. Với một số giả thiết thích hợp, phương trình vi phân thường cấp I có thể viết được dưới dạng sau (gọi là dạng giải ra đối với đạo hàm)

$$y' = f(x, y) \tag{1.1.5}$$

với f liên tục trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$.
Ví dụ: Các phương trình

$$\begin{aligned} & e^y + e^{y'}\mathrm{cosx} = 1 \\ & (\mathrm{y}''')^2 - 2\mathrm{x}y = \ln x \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

lần lượt là các phương trình vi phân thường cấp I, cấp III và phương trình đạo hàm riêng cấp II.

1.1.3 Bài toán Cauchy

Nghiệm của một phương trình vi phân nói chung phụ thuộc vào một hay nhiều hằng số tùy ý nào đó. Để xác định một nghiệm cụ thể, ta cần thêm một hay vài dữ kiện nào đó về nghiệm (tùy theo cấp của phương trình vi phân). Chẳng hạn, $y = \dfrac{x^3}{3} + C$ là nghiệm tổng quát của phương trình $y' = x^2$. Dễ thấy $y = \dfrac{x^3}{3} + 1$ là nghiệm (duy nhất) thỏa mãn $y(0) = 1$.
Ta xét bài toán sau đây đặt ra đối với phương trình $F(x, y, y') = 0$, gọi là bài toán Cauchy (hay bài toán giá trị ban đầu):

$$\text{Bài toán y(x) thỏa} \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

trong đó $(x_0, y_0) \in D$ được gọi là điều kiện ban đầu.
Chú ý: Không phải lúc nào bài toán Cauchy cũng có nghiệm, và khi có nghiệm cũng không nhất thiết có duy nhất nghiệm. Chẳng hạn phương trình $y' = x^2, y(0) = 0$ có duy nhất một nghiệm là $y = \dfrac{x^3}{3}$ phương trình $xy' = y, y(0) = 1$ không có nghiệm nào, phương trình $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$ có ít nhất hai nghiệm là $y \equiv 0$ và $y^2 = \dfrac{8}{27}x^3$.

1.1.4 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định nghĩa 1.1.1. Cho hàm $f(x, y)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ ta nói hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trên D nếu tồn tại số dương L (gọi là hằng số Lipschitz) sao cho:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \text{ với mọi } (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

Nhận xét: Điều kiện Lipschitz là yếu hơn so với điều kiện giới nội của đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ trên D. Thật vậy giả sử $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$.
Khi đó áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x, y)$ theo biến y ta được

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f}{\partial y}\left[x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)\right]$$

Định lý 1.1.2 (3). **(Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm).**
Giả sử hàm số $f(x, y)$ trong (1.1.6) liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trên hình chữ nhật

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \,|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\right\}$$

Khi đó nghiệm của bài toán Cauchy(1.1.6) là tồn tại và duy nhất trong đoạn $I := [x_0 - h, x_0 + h]$, với $h := \min(a, \dfrac{b}{M})$ và $M := \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$.

Chứng minh. Sự tồn tại Chứng minh rằng phép lặp Picard hội tụ đều trên I đến một nghiệm của bài toán Cauchy.
Trước tiên ta chứng minh quy nạp rằng

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ với mọi } x \in I$$

với k=0, bất đẳng thức trên chính là $\left|\int\limits_{x0}^{x} f(t, y_0(t))dt\right| \leq M\,|x - x_0|$
bất đẳng thức này đúng.