ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HẢI

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT XẤP XỈ ĐỀU TỐT NHẤT VÀ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

Mục lục

1Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Mở đầu

Chúng ta đã biết *Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất* là một nhánh của lý thuyết xấp xỉ hàm, có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán lý thuyết cũng như trong các toán ứng dụng. Đặc biệt, nó được dùng để tìm đa thức có *"độ lệch"* nhỏ nhất so với hàm số cho trước trên một đoạn xác định. Từ việc nghiên cứu kĩ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất chúng ta có thể giải quyết được một số dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Và dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Khải, tác giả đã nghiên cứu đề tài "Một số vấn đề về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất và ứng dụng trong toán sơ cấp".

Nội dung của luận văn này là trình bày về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất từ đó xây dựng lên các bài tập toán sơ cấp áp dụng phần lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất vào giải bài toán. Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày một số định nghĩa cơ bản về không gian Mêtric, không gian Banach, không gian Hilbert.

Chương 2: Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất. Chương này giới thiệu một số định nghĩa, định lý về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất, các trường hợp đặc biệt xấp xỉ đa thức bằng đa thức bậc không, đa thức bậc nhất.

Chương 3: Một số ứng dụng của lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất vào giải một số bài toán sơ cấp. Phần đầu của Chương 3 trình bày về lời giải tổng quát của một lớp các bài toán sơ cấp, thông qua lời giải dựa trên lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất để hình thành lên lời giải sơ cấp. Phần tiếp theo áp dụng lời giải tổng quát vào giải một số bài tập sơ cấp cụ thể. Và từ đó đưa ra các dạng bài tập có đề bài tương tự.

Kết quả cơ bản của luận văn được tham khảo trong cuốn *Numerical methods* của Bakhvalov N.S.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên. Tác giả xin bầy tỏ lòng biết ơn trân trọng tới thầy TS. Nguyễn Văn Khải, thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và viết luận văn vừa qua.

2Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô trong Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bầy tỏ lòng cảm ơn tới các thầy cô.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong suốt qua trình học tập tại nhà trường và hoàn thành luận văn này trong thời gian qua.

Tác giả xin bầy tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân, các anh chị trong lớp cao học Toán K4C đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ tác giả trong suốt quá trình học cao học cũng như viết luận văn để đạt kết quả tốt nhất.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Và xin trân trọng cảm ơn!

Quảng Ninh, ngày 10 tháng 10 năm 2012.
Tác giả

Phạm Thị Hải

3Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn hoàn toàn trung thực và chưa có ai công bố trong một công trình nào khác.

Tác giả

Phạm Thị Hải

4Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này, ta sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về không gian mêtric, không gian Banach, không gian Hilbert. Các kiến thức này được lấy từ các tài liệu [1, 5, 8].

Trong chương này, các không gian tuyến tính đều được xét trên trường số thực $\mathbb{R}$.

1.1 Không gian mêtric

Định nghĩa 1.1. Tập X khác rỗng được gọi là không gian mêtric nếu với mỗi cặp phần tử x, y đều xác định theo một quy tắc nào đó, một số thực $\rho(x, y)$ gọi là " khoảng cách giữa x và y " và thỏa mãn các tiên đề sau:

1) $\rho(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$;
   $\rho(x, y) = 0$ nếu $x = y$.
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$.
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$.

Hàm số $\rho(x, y)$ gọi là mêtric của không gian X

Ví dụ 1.1. Trong $\mathbb{R}^n$, với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ thì $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, là mêtric trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. Cho không gian mêtric X. Dãy $\{x_n\}$ được là dãy Cauchy (hay dãy cơ bản) nếu $\lim\limits_{n,m \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ tức là: $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, sao cho $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$, ta có $\rho\left(x_n, x_m\right) < \varepsilon$.

5Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Dĩ nhiên một dãy hội tụ bao giờ cũng là dãy Cauchy (dãy cơ bản), vì nếu $x_n \to x$ thì theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0, (n, m \to \infty).$$

1.2 Không gian Banach

Định nghĩa 1.3. *(Không gian tuyến tính)*

Một tập X được gọi là *một không gian tuyến tính* nếu ứng với mỗi cặp phần tử x, y của X ta có, theo một quy tắc nào đó, một phần tử của X, gọi là *tổng của x với y* được kí hiệu là $x + y$; ứng với mỗi phần tử x của X và một số thực α ta có, theo một quy tắc nào đó, một phần tử của X, gọi là *tích của x với α* được kí hiệu là αx. Các quy tắc nói trên thỏa mãn 8 tiên đề sau:

1) $x + y = y + x$ (tính chất giao hoán của phép cộng).
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (tính chất kết hợp của phép cộng).
3) $\exists$ phần tử $0 : x + 0 = x, \forall x \in X$.
4) Với mỗi $x \in X$ ta có một phần tử $-x \in X : x + (-x) = 0$.
5) $1.x = x$.
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, với α, β là những số bất kì.
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Trên đây là định nghĩa không gian tuyến tính thực. Nếu trong định nghĩa ta thay các số thực bằng các số phức thì ta có không gian tuyến tính phức.

Không gian tuyến tính cũng thường gọi là không gian vectơ và các phần tử của nó cũng gọi là các vectơ.

Định nghĩa 1.4. *(Không gian tuyến tính định chuẩn)*

Một không gian định chuẩn là một không gian tuyến tính X, trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của nó sao cho các điều kiện sau đây thỏa mãn, với mọi $x, y \in X$ và mọi số thực α.

1) $\|x\| > 0$ nếu $x \ne 0$; $\|x\| = 0$ nếu $x = 0$.
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (tính thuần nhất của chuẩn).
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (bất đẳng thức tam giác).

6Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Ví dụ 1.2. Không gian mêtric $\mathbb{R}^n$ là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn tương ứng là

$$\mathbb{R}^n: \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2}$$

Định nghĩa 1.5. (*Không gian Banach*)

Cho không gian tuyến tính định chuẩn X, $\quad d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định: $d(x, y) = ||x - y||$ thì $d(x, y)$ gọi là hàm khoảng cách, ta nói khoảng cách này là khoảng cách cảm sinh bởi chuẩn.

Không gian Banach là không gian tuyến tính định chuẩn đầy đủ.

Ví dụ 1.3. Có thể chứng minh rằng không gian

$$C_{[a,b]} = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , f là liên tục}\}$$

với chuẩn Chebyshev: $\|f\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$ là một không gian Banach.

Định nghĩa 1.6. Không gian Banach X được gọi là lồi thực sự nếu:

$$\forall x, y \neq 0 \quad \| x + y \| = \| x \| + \| y \| \Rightarrow y = \lambda x (\lambda > 0)$$

Ví dụ 1.4. Không gian $C_{[a,b]}$ không lồi thực sự.

Vì với $x(t) \equiv 1$; $\quad y(t) \equiv \dfrac{t - a}{b - a}$, ta có: $\| x + y \| = \| x \| + \| y \| = 2$ nhưng $y \neq \lambda x$.

1.3 Không gian Hilbert

Trong phần này ta sẽ xét X là một không gian Hilbert thực.

Định nghĩa 1.7. *(Không gian tiền Hilbert)*

Một không gian tuyến tính thực X được gọi là không gian tiền Hilbert nếu trong đó có xác định một hàm hai biến (x, y) gọi là tích vô hướng của hai vectơ (x, y) với các tính chất sau:

1) $(x, y) = (y, x)$
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ với α là số thực.
4) $(x, x) > 0$ nếu $x \neq 0$, $(x, x) = 0$ nếu $x = 0$

Và thỏa mãn hệ thức 5) $(x, x) = \|x\|^2$ tức là $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ xác định một chuẩn trong không gian X, nói cách khác không gian tiền Hilbert như trên là một không gian định chuẩn.

Ví dụ 1.5. Không gian $C_{[a,b]}$ gồm tất cả các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ với các phép toán thông thường và với tích vô hướng cho bởi:

$(x,y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ là một không gian tiền Hilbert.

Định nghĩa 1.8. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là *không gian Hilbert.*

Ví dụ 1.6. Không gian $L^2_{[a,b]}$ với chuẩn $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ là một không gian Hilbert.

Nhận xét 1.1. i) Không gian tiền Hilbert là không gian định chuẩn với chuẩn $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$.

ii) Không gian tiền Hilbert luôn có bất đẳng thức Schwars:

$\|(x,y)\| \leq \|x\| \, . \, \|y\|$.

iii) Không gian tiền Hilbert luôn thỏa mãn điều kiện bình hành:

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

iv) Tích vô hướng (x,y) là một hàm số liên tục đối với biến x và y.

Ví dụ 1.7. Mọi không gian Hilbert là lồi thực sự.

Thật vậy, ta có $\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$.

Bình phương hai vế của đẳng thức: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$.

Mà

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Suy ra $\langle x,y\rangle = \| x \| \| y \|$.

Từ bất đẳng thức Cauchy- Bunhiacovski- Schwartz, suy ra

$y = \lambda x, (\lambda > 0)$.

8Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Chương 2

Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất

Chương này trình bày những kết quả quan trọng về lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất như sự tồn tại của xấp xỉ tốt nhất trong không gian Banach, xấp xỉ đều tốt nhất trong không gian $C_{[a,b]}$ và một số trường hợp đặc biệt xấp xỉ bằng đa thức bậc không hay xấp xỉ bằng đa thức bậc nhất. Các kết quả của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 7,10].

2.1 Đặt bài toán

Cho hàm số $f \in C_{[a,b]}$. Gọi P_n là tập hợp các đa thức có bậc không quá n trên $[a, b]$. Ta phải tìm đa thức $P \in P_n$ có "độ lệch" nhỏ nhất so với f trên $[a, b]$ tức là:

$$\max_{x\in[a,b]} \mid f(x) - P(x) \mid = \min_{Q\in P_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \tag{2.1}$$

Nếu trong $C_{[a,b]}$ ta xét chuẩn $\| \varphi \| = \max\limits_{t\in[a,b]} \mid \varphi(t) \mid, (\varphi \in C_{[a,b]})$ thì bài toán (2.1) có dạng:

Tìm $P \in P_n$ sao cho

$$\| f - P \| = E_n(f) := \min_{Q\in P_n} \| f - Q \| \tag{2.2}$$

Phần tử đạt cực tiểu kí hiệu là $P = \arg\min\limits_{Q\in P_n} \| f - Q \|$

9Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn