ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

– – – – – – – – – – –

**NGUYỄN LAN ANH**

# GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP THÔNG QUA SỐ PHỨC VÀ HÀM PHỨC

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**

Thái Nguyên - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

– – – – – – – – – – –

**NGUYỄN LAN ANH**

# GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SƠ CẤP THÔNG QUA SỐ PHỨC VÀ HÀM PHỨC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học: TS NGUYỄN VĂN MINH**

**Thái Nguyên - 2012**

# Mục lục

# Mở đầu

Số phức xuất hiện từ thế kỷ XIX do nhu cầu phát triển của Toán học về giải những phương trình đại số mới. Từ khi mới ra đời số phức đã thúc đẩy toán học tiến lên mạnh mẽ và giải quyết được nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật, vì thế mặc dù gọi là số ảo nhưng trường đóng vai trò rất quan trọng trong đời sống thực của chúng ta.

Đối với học sinh ở bậc trung học phổ thông thì số phức là một nội dung còn khá mới mẻ, với thời lượng không nhiều, học sinh mới chỉ biết được những kiến thức rất cơ bản của số phức, việc khai thác các ứng dụng của số phức còn rất hạn chế, đặc biệt là khai thác số phức để giải quyết các bài toán sơ cấp khó.

Nhằm mục đích tìm hiểu một cách chi tiết hơn về số phức cũng như có cách nhìn sâu sắc hơn về một số ứng dụng của số phức trong việc giải các bài toán sơ cấp nên tôi quyết định chọn đề tài nghiên cứu: "Giải một số bài toán sơ cấp thông qua số phức".

Luận văn này gồm ba chương:

Chương 1: Giới thiệu về số phức, chứng minh trong tập số phức này có các phép toán cộng và nhân như trên tập số thực, đồng thời giới thiệu các dạng biểu diễn của nó cũng như tính chất đặc trưng trong từng dạng.

Chương 2: Giới thiệu một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong đại số và giải tích.

Chương 3: Giới thiệu một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong hình học phẳng.

Mặc dù đã rất cố gắng nghiên cứu tài liệu và bằng những kinh nghiệm giảng dạy của bản thân mình tác giả đã hoàn thành luận văn. Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ thời gian, chắc chắn rằng trong quá tình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo và đóng góp ý kiến của quý thầy (cô) và độc giả quan tâm đến luận văn này.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS.Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc, chân thành nhất đối với Thầy. Bởi sự giúp đỡ, chỉ bảo, khuyến khích ân cần của Thầy đã góp phần rất lớn cho sự thành công của luận văn này.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới Ban lãnh đạo, Phòng Đào tạo-Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô tham gia giảng dạy khóa Cao học 2010-2012. Đồng thời xin cảm ơn tập thể lớp Cao học Toán K4A Trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Cuối cùng tôi xin được gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, những người thân đã luôn ở bên, động viên, giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 7 năm 2012

*Người thực hiện*

**Nguyễn Lan Anh**

# Chương 1

# XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Trong chương này, chúng tôi trình bày cách xây dựng trường số phức, cấu trúc đại số, cấu trúc hình học, dạng lượng giác của số phức.

## 1.1 Định nghĩa số phức

Xét tập $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} * \mathbb{R} = \{(x, y)\}|x, y \in \mathbb{R}$.
Hai phần tử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là bằng nhau nếu và chỉ nếu

$$(x_1 = x_2, y_1 = y_2)$$

Ta xây dựng phép toán trong $\mathbb{R}^2$ như sau: $\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
Phép cộng: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
Phép nhân: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

**Định nghĩa 1.1.1.** Tập $\mathbb{R}^2$ cùng với hai phép toán cộng và nhân được định nghĩa như trên gọi là tập số phức $\mathbb{C}$, phần tử $(x, y) \in \mathbb{C}$ là một số phức.

**Định lý 1.1.2.** $(\mathbb{C}, +, .)$ *là một trường (nghĩa là trên* $\mathbb{C}$ *với các phép toán đã định nghĩa có các tính chất tương tự trên* $\mathbb{R}$ *với các phép toán cộng nhân thông thường)*

*Chứng minh.* Để chứng minh $(\mathbb{C}, +, .)$ là trường ta chứng minh các vấn đề sau.
(i) Phép cộng có tính giao hoán:
$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ ta có

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1.$$

(ii) Phép cộng có tính kết hợp:
$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3).$$

(iii) Tồn tại phần tử không $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$.
Thật vậy ta có: $\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$.
(iv) Tồn tại phần tử đối $\forall z = (x, y), \exists - z = (-x, -y)$ là phần tử đối:
Thật vậy $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$.
(v) Phép nhân có tính chất giao hoán:
$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, ta có:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2.y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = z_2 z_1.$$

(vi) Phép nhân có tính chất kết hợp:
$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$(z_1 z_2) z_3 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3)$$
$$= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + y_1 x_2) y_3, (x_1.x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) x_3)$$
$$= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3)$$
$$= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 y_3, x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3)$$
$$= (x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(y_2 x_3 + x_2 y_3), y_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) + x_1(x_2 y_3 + y_2 x_3))$$
$$= (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3))$$

Điều này chứng tỏ: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
(vii) Phép nhân phần tử đơn vị.
Tồn tại phần tử đơn vị $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$.
Thật vậy ta có: $\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}$,

$$1.z = (1, 0)(x, y) = (1x - 0y, 1y + 0.x) = (x, y) = (x, y)(1, 0)$$
$$= (x1 - y0, x0 + y1) = (x, y) = z1 = z.$$

(viii) Tồn tại phần tử nghịch đảo:
$\forall z_1 = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0$, phần tử nghịch đảo của $z$ là $z^{-1} = \left( \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

(ix) Phép nhân phân phối với phép cộng:
$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$z_1(z_2 + z_3) = (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3); x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3))$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3)$$

$$= z_1z_2 + z_1z_3.$$

Vậy ta đã chứng minh được $(\mathbb{C}, +, .)$ thỏa mãn các tiên đề của trường. Do đó $(\mathbb{C}, +, .)$ là một trường số. □

Có rất nhiều cách biểu diễn của số phức trên, mà mỗi cách có thể khai thác được một số tính chất đặc biệt các nhau của tập $\mathbb{C}$, sau đây tôi giới thiệu một số cách biểu diễn đó.

## 1.2 Dạng đại số của số phức

### 1.2.1 Xây dựng số $i$

Xét tương ứng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_x\{0\}, f(x) = (x, 0)$
Dễ dàng chứng minh được $f$ là ánh xạ và hơn nữa là một song ánh.
Ngoài ra ta cũng có: $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), (x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$, vì $f$ là song ánh nên ta có thể đồng nhất $(x, 0) = x$.
Đặt $i = (0, 1)$, khi đó ta có:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1)$$

$$= x + yi = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Từ đó ta có kết quả sau:

**Định lý 1.2.1.** *Mỗi số phức tùy ý $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$$

*trong đó hệ thức $i^2 = -1$.*

Hệ thức $i^2 = -1$ suy trực tiếp từ phép nhân hai số phức

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Biểu thức $x + yi$ gọi là dạng đại số của số phức $z = (x, y)$.
Do đó $\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ và từ bây giờ ta ký hiệu cho số phức $z = (x, y) = x + yi$ và ta có các khái niệm liên quan sau đây:
$x = Re(z)$ gọi là phần thực của số phức $z$,
$y = Im(z)$ gọi là phần ảo của số phức $z$,
$i$ gọi là đơn vị ảo.
Nếu số phức có phần thực $x = 0$ gọi là thuần ảo.
Hai số phức $z_1, z_2$ gọi là bằng nhau nếu

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$$

Số phức $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $Im(z) = 0$.
Số phức $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ nếu $Im(z) \neq 0$.

### 1.2.2 Các phép toán trên dạng đại số

Tương tự, ta cũng định nghĩa phép toán cộng và nhân như sau

$$\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

(i). Phép cộng
Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, là một số phức $z$ được xác định:

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \in \mathbb{C}$$

Kí hiệu $z = z_1 + z_2$.
(ii).Phép nhân
Tích của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là một số phức $z$ được xác định bởi:

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}$$

Kí hiệu $z = z_1z_2$.
Định nghĩa này trùng với định nghĩa các phép toán trên $\mathbb{C}$ ở phần trước.

### 1.2.3 Số phức liên hợp và Môđun của số phức

**Định nghĩa 1.2.2.** Cho số phức $z = x + iy$, số phức có dạng $x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z$, kí hiệu là $\overline{z}$, nghĩa là $z = x + yi$ và $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

**Định lý 1.2.3.** *Trên $\mathbb{C}$ ta có.*

1. $z = \overline{z}, \forall z \in \mathbb{R}$

2. $z = \overline{\overline{z}}$

3. $z.\overline{z}$ *là số thực không âm.*

4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

6. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, z \in C^*$

7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \in C^*$

8. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2i}$

*Chứng minh.* 1. Ta có:$z = \overline{z} <=> x + yi = x - yi$. Do đó $2yi = 0 <=> y = 0 <=> z = x \in \mathbb{R}$.
2. Ta có: $\overline{z} = x - yi => \overline{\overline{z}} = x + yi = z$.
3. Ta có: $z.\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \geqslant 0$
4. Ta có: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$

$$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

5. Ta có: $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

6. Ta có: $z\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \overline{\left(z\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} \Rightarrow \overline{z}\overline{\frac{1}{z}} = 1 \Rightarrow \overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
7. Ta có: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1.\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1}\frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
8. $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

$$z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$$

Do đó : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2i}$ □