ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Hữu Cần

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ

Thái Nguyên - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ

Phản biện 1: PGS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn.

Phản biện 2: PGS.TS. Nông Quốc Chinh.

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Ngày 01 tháng 12 năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu

Trong Toán học việc vận dụng các công cụ của Toán học cao cấp để giải quyết các vấn đề của Toán học sơ cấp luôn luôn là điều thú vị và có ý nghĩa sâu sắc. Chúng ta biết rằng các bài toán sơ cấp chủ yếu được xét trên trường $\mathbb{Q}$ hoặc trường $\mathbb{R}$ thì đây là các bài toán rất khó. Khi chúng ta nhúng $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$ thì các bài toán này sẽ trở lên dễ đi rất nhiều. Như chúng ta đã biết các vấn đề liên quan đến phương trình là một phần quan trọng của Đại số và giải tích. Khi tiếp cận vấn đề này các em học sinh giỏi, sinh viên và khá nhiều thầy cô giáo phổ thông thường gặp nhiều khó khăn trong giải quyết các bài toán khó. Trong luận văn này, chúng tôi trình bày lại khái niệm phương trình đại số, mở rộng trường, chứng minh lại tính đóng của $\mathbb{C}$... để giải quyết vấn đề đó.

Trong các kỳ thi Olympic Toán Quốc tế, thi học sinh giỏi Quốc gia, thi Olympic sinh viên giữa các trường Đại học, cao đẳng, những bài toán liên quan đến phương trình đại số cũng hay được đề cập và thường rất khó, đòi hỏi người học, người làm toán phải có kiến thức rộng và sâu sắc về mở rộng trường mới dễ dàng tìm ra được lời giải hay và chính xác.

Chẳng hạn, chúng ta xét hai ví dụ:

Ví dụ 0.0.1. mặt phẳng Oxy, một hệ các điểm $A_n(x_n, y_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} A_0(x_0 = 3, y_0 = 3), A_1(x_1 = 8, y_1 = 5), A_2(x_2 = 58, y_2 = 45), \text{với } n \geq 2 \\ A_{n+2}(x_{n+2} = 8x_{n+1} - 3x_n - 3x_{n-1}, y_{+2} = 5y_{n+1} + 10y_n - 7y_{n-1}). \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} x_n = \mathrm{C}_n^0 y_n + \mathrm{C}_n^1 y_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} y_1 + \mathrm{C}_n^n y_0 \\ y_n = \mathrm{C}_n^0 x_n - \mathrm{C}_n^1 x_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} x_1 + (-1)^n \mathrm{C}_n^n x_0. \end{cases}$$

Ví dụ 0.0.2. Cho $f = \cos u + \mathrm{C}_n^1 \cos(u+\alpha)x + \cdots + \mathrm{C}_n^n \cos(u+n\alpha)x^n$. Giải phương trình $f(x) = 0$.

Ví dụ 0.0.1 là bài toán về dãy các số nguyên và Ví dụ 0.0.2 là giải phương trình trên $\mathbb{R}$, việc giải hai bài toán này trên $\mathbb{Z}$ hoặc $\mathbb{R}$ là rất khó khăn. Nhưng nếu chúng ta giải quyết nó trên tập $\mathbb{C}$ thì dễ dàng tìm được lời giải. Vì thế, một phương pháp để giải quyết những bài toán trên $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$ là xét bài toán trên một mở rộng trường F của $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$ mà ở đó bài toán sẽ dễ dàng hơn và nhiều khi còn giúp chúng ta tìm ra kết quả mới.

Để phục vụ cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi và việc trao đổi kinh nghiệm giữa các thầy cô giáo dạy học sinh giỏi quan tâm và tìm hiểu thêm về phần này, được sự chỉ dạy, hướng dẫn tận tình của thầy Đàm Văn Nhỉ, chúng tôi đã tìm hiểu và viết đề tài " Phương trình và bất phương trình".

Đề tài giải quyết các vấn đề trọng tâm:

Chương 1. Phương trình đại số

Chương này tập trung trình bày về mở rộng trường, mở rộng đại số, chứng minh lại Định lý cơ bản của Đại số, định nghĩa phương trình đại số và chứng minh lại Định lý không điểm của Hilbert.

Chương 2. Ứng dụng của phương trình đại số

Trong chương này, chúng tôi trình bày một vài ứng dụng của mở rộng trường, phương trình đại số và tính đóng của $\mathbb{C}$ để tìm hoặc chứng minh một đa thức bất khả qui, xét tính chia hết của vài đa thức đặc biệt, phân tích đa thức thành nhân tử, giải phương trình và các ứng dụng trong Hình học.

Chương 3. Ứng dụng vào giải Toán ở Trung học phổ thông

Trong chương này, chúng tôi xin giới thiệu một vài ứng dụng của công thức Moivre để xây dựng các phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức. Thông qua đó rèn luyện tư duy linh hoạt, tính sáng tạo cho học sinh trung học phổ thông.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy (Cô) trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học cùng các thầy cô tham gia giảng dạy khóa Cao học 2010-2012. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K4C trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Bắc Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Tiên Du số 1- Huyện Tiên Du - Tỉnh Bắc Ninh đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân còn hạn chế và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên trong quá trình nghiên cứu chắc sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của quý Thầy Cô và bạn đọc.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 12 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Hữu Cần

Các ký hiệu sử dụng

$\mathbb{N}$ được ký hiệu cho tập các số tự nhiên.

$\mathbb{N}^*$ được ký hiệu cho tập các số tự nhiên dương.

$\mathbb{Z}$ được ký hiệu cho vành các số nguyên.

$\mathbb{Q}$ được ký hiệu cho trường các số hữu tỷ.

$\mathbb{R}$ được ký hiệu cho trường các số thực.

$\mathbb{C}$ được ký hiệu cho trường các số phức.

K được ký hiệu cho một trong ba trường $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

Các ký hiệu viết tắt

HSG được ký hiệu cho học sinh giỏi.

ΔABC được ký hiệu cho tam giác ABC.

A, B, C được ký hiệu cho các góc ở đỉnh A, B, C của ΔABC.

a, b, c được ký hiệu cho độ dại các cạnh tương ứng của ΔABC.

h_a, h_b, h_c được ký hiệu cho độ dài các đường cao kẻ từ A,B,C của ΔABC.

m_a, m_b, m_c được ký hiệu cho độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A,B,C của ΔABC.

Chương 1 Phương trình đại số

Chương này tập trung trình bày về mở rộng trường, mở rộng đại số, chứng minh lại Định lý cơ bản của Đại số, định nghĩa phương trình đại số và chứng minh lại Định lý không điểm của Hilbert.

1.1. Mở rộng trường

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai trường F và K. Trường F được gọi là một *mở rộng* của K nếu K là một vành con của F.

Nếu trường F là một mở rộng của trường K thì F được coi như là một không gian véctơ trên K. Số chiều của không gian này được gọi là *bậc mở rộng của F trên K* và được kí hiệu qua $[F : K]$. Trường F được gọi là *mở rộng bậc hữu hạn (vô hạn) của K* nếu bậc mở rộng của nó là hữu hạn (vô hạn).

Một *tháp các trường* là một dãy các trường $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sao cho $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$, K_{i+1} là mở rộng của K_i với $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ví dụ 1.1.1.

1) Vì $\mathbb{C}$ là một không gian véctơ trên $\mathbb{R}$ với một cở sở $\{1, i\}$ và số chiều bằng 2 nên trường số phức $\mathbb{C}$ là một mở rộng bậc 2 của trường số thực $\mathbb{R}$.

2) Vì trường $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là một không gian véctơ trên $\mathbb{Q}$ với cơ sở $\{1, \sqrt{2}\}$ nên trường $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ là một mở rộng bậc 2 của trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

   Tương tự trường $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một mở rộng bậc 2 của trường $\mathbb{Q}$.

Định lý 1.1.1. *Cho một tháp các trường $K \subset E \subset F$. Khi đó F là một mở rộng bậc hữu hạn của K nếu và chỉ nếu F là một mở rộng bậc hữu* *hạn của E và E là một mở rộng bậc hữu hạn của K. Hơn nữa, ta còn có $[F : K] = [F : E].[E : K]$.*

Chứng minh: Giả sử $[F : E] = s$ và $[E : K] = r$. Khi đó tồn tại một cơ sở $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ của F trên E và một cơ sở $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ của E trên K. Ta chỉ cần chứng minh rằng $\{v_i w_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r\}$ là một cơ sở của F trên K. Thật vậy, do $F = Ev_1 + Ev_2 + \cdots + Ev_s$ và $E = Kw_1 + Kw_2 + \cdots + Kw_r$, nên $F = \sum Kv_i \mathrm{w}_j$ và rút ra $\{v_i w_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r\}$ là một hệ sinh của K-không gian véctơ F. Bây giờ giả sử rằng $0 = \sum a_{\mathrm{ij}} v_i \mathrm{w}_j = \sum\limits_i (\sum\limits_j a_{\mathrm{ij}} \mathrm{w}_j) v_i$. Do $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ là một cơ sở của E- không gian véctơ F, nên $\sum\limits_j a_{\mathrm{ij}} \mathrm{w}_j = 0$. Tiếp đến, do $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ là một cơ sở của K-không gian véctơ E, nên kéo theo các $a_{ij} = 0$. Vậy hệ $\{v_i w_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r\}$ là độc lập tuyến tính trên K và do đó hệ này là một cơ sở của K-không gian véctơ F. Ta nhận được $[F : K] = rs = [F : E][E : K]$. □

Hệ quả 1.1.1. *Cho một tháp các trường $K = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = F$. Khi đó nếu F là một mở rộng bậc hữu hạn của K thì*

$$[F : K] = [F : K_{n-1}] \ldots [K_2 : K_1].$$

Cho F là một trường và $X \subset F$. Khi đó giao của tất cả các trường con của F chứa X được gọi là *trường con* của F sinh bởi tập X. Nếu F là một mở rộng của K và $X \subset F$ thì trường con sinh bởi $X \cup K$ được gọi là *trường con* sinh bởi X trên K và kí hiệu là $K(X)$. Trong trường hợp X là một tập hữu hạn gồm n phần tử $u_1, u_2, \ldots, u_n$ thì ta viết $K(X) = K(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Trường $K(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ được gọi là một *mở rộng hữu hạn sinh của K.*

1.1.1. Mở rộng đơn

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử F là một mở rộng của K. F được gọi là một *mở rộng đơn* của K nếu như tồn tại một phần tử $u \in F$ sao cho $F = K(u)$, còn u được gọi là *phần tử nguyên thủy* của F.

Ví dụ 1.1.2.