ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Đức Thành

DÃY SỐ VÀ TỔNG

SEQUENCE OF NUMBER AND SUM

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS - TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS - TS. Đàm Văn Nhỉ

Phản biện 1: **PGS-TS. Lê Thị Thanh Nhàn**

. . . .

Phản biện 2: **PGS-TS. Nông Quốc Chinh**

. . . .

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày 01 tháng 9 năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu

Dãy số và tổng là một vấn đề được nhiều người quan tâm. Vấn đề này thường xuất hiện trong các dạng bài toán Đại số, Giải tích, Lý thuyết xấp xỉ hoặc trong các kỳ thi Học sinh giỏi Quốc gia-Quốc tế. Luận văn này đặt vấn đề nghiên cứu Dãy số và tính một số tổng các số hạng của một dãy số nào đấy. Muốn tiếp cận được, đòi hỏi người học, người làm toán phải được trang bị một vốn kiến thức về dãy số, về các phương pháp giải, hay các thủ thuật trong tính toán và biến đổi.

Chính vì vậy tôi đã lựa chọn vấn đề này nghiên cứu, nhằm giúp những người yêu toán ham hiểu biết. Có một góc nhìn mới bao quát hơn, lập luận sâu sắc hơn với những bài toán về "Dãy số và tổng" và được trình bày qua nhiều cách giải đặc biệt. Ngoài ra còn vận dụng một số kiến thức của Toán Cao cấp vào giải quyết các bài toán khó, điển hình và hay gặp.

Luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1. Các kiến thức chuẩn bị .

Được dành trình bày lại một số kết quả về Vành đa thức, Vành các chuỗi luỹ thừa hình thức và giới thiệu một số Dãy số đặc biệt.

Chương 2 . Dãy số truy hồi và Tổng.

Trình bày về Dãy truy hồi, Dãy xây dựng qua hàm. Đặc biệt, trong chương này còn giới thiệu cách tìm giới hạn của một số dãy số, tính một số tổng đặc biệt bằng phép biến đổi Abel. Với những ví dụ, những bài toán có phương pháp giải ngắn gọn, dễ hiểu và vận dụng nhiều kiến thức khác nhau.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS-TS. Đàm Văn Nhỉ - Đại Học Sư Phạm Hà Nội. Bản thân em, xin được bày tỏ sự biết ơn sâu sắc, lòng mến phục về kiến thức uyên bác, sự quan tâm và những lời động viên của Thầy. Đã giúp em hoàn thành luận văn này.

Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K_4A Trường Đại Học Khoa Học đã đoàn kết, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn này.

Song với sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc chắn rằng trong quá trình nghiên cứu, trình bày sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Qua đây, em rất mong nhận được những ý kiến đóng góp xác đáng của các Thầy Cô và các độc giả cho luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 07 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Đức Thành

Chương 1
Kiến thức chuẩn bị

1.1. Vành đa thức

1.1.1. Định nghĩa

Cho vành A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức (trên A) bậc n biến x là một biểu thức có dạng $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0)$, trong đó các $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số bậc cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Nếu $a_i = 0, i =, 2, ..., n-1$ và $(a_n \neq 0)$ thì ta có bậc của đa thức là 0.

Nếu $a_i = 0$, với mọi $i = 0, 1, 2, ..., n$ thì ta coi bậc của n là và gọi là đa thức không (nói chung thì người ta không định nghĩa bậc đối với đa thức không). Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành A được ký hiệu $A[x]$.

Khi $A = K$ là một trường thì $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = Z$ hoặc $A = Q$ hoặc $A = R$ hoặc $A = C$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $Z[x], Q[x], R[x], C[x]$.

1.1.2. Các phép toán trên đa thức

Cho hai đa thức:
$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$
$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$
Khi đó phép cộng và phép nhân hai đa thức là
$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + ... + (a_m + b_m)x^m + b_{m+1}x^{m+1} + ... + b_n x^n$.
$p(x)q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + ... + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0)x^k + ... + a_m b_n x^{m+n}$ trong đó ta giả sử $n \geq m$.

1.1.3. Các tính chất cơ bản

Định lý 1.1. Giả sử A là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $A[x]$, thế thì bao giờ cũng có hai đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $A[x]$ sao cho

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với deg $r(x) <$ deg $g(x)$
Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.
Giả sử a là phần tử tuỳ ý của vành A, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ là đa thức tuỳ ý của vành $A[x]$, phần tử $f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + ... + a_1 a + a_0$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a.
Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Bài toán tìm nghiệm của $f(x)$ trong A gọi là giải phương trình đại số bậc n
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, (a_n \neq 0)$

Định lý 1.2. Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $(x - a)$ chính là $f(a)$.

Định lý 1.3. Số a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)$.
Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên $(m \geqslant 1)$. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{m+1}$.
Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm cấp bội m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Định lý 1.4. Đa thức $f(x) \in A[x]$ bậc $n \geqslant 1$. khi đó ta có kết quả sau:
(i) Nếu $\alpha \in A$ là nghiệm của $f(x)$ thì $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ với $g(x) \in A[x]$
(ii) $f(x)$ có không quá n nghiệm phân biệt trong K

1.1.4. Một số ví dụ

Ví dụ 1.1. Cho $a \in R^*$ và cho 2 số nguyên dương m, k. Giả sử đa thức $P_n(x)$ bậc n sao cho $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x - a)^k$.
Chứng minh rằng $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x^m - a^m)^k$.

Bài giải: Theo giả thiết thì $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x - a)^k$. Vậy nên $mx^{m-1}P_n^{"}(x^m)$ chia hết cho $(x - a)^{k-1}$. Do hai đa thức x^{m-1} và $(x - a)^{k-1}$ nguyên tố cùng nhau, nên $P_n^{"}(x^m)$ chia hết cho $(x - a)^{k-1}$. Từ đó suy ra $P_n^{\{(k-1)}(x^m)$ chia hết cho $x - a$. Vậy nên

$P_n(a^m) = P_n^{"}(a^m) = ... = P_n^{\{(k-1)}(a^m) = 0.$
Do đó $P_n(t)$ chia hết cho $(t - a^m)^k$.
Thay t bởi x^m ta có kết luận $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x^m - a^m)^k$.

Ví dụ 1.2. Phân tích thành nhân tử $4(a^2 + ab + b^2)^3 - 27(a^2b + ab^2)^2$. Từ đó suy ra $4(a^2 + ab + b^2)^3 \geqslant 27(a^2b + ab^2)^2$ với mọi $a, b \in R$

Bài giải: Ta nhận thấy $f(a, b) = 4(a^2 + ab + b^2)^3 - 27(a^2b + ab^2)^2$ là đa thức thuần nhất và đối xứng của a và b. Vì $f(a, a) = 0$ nên $f(a, b) = (a - b)g(a, b)$. Vì đa thức đối xứng f mà chia hết cho $a - b$ thì nó chia hết cho $(a - b)^2$, (chứng minh.) Đặt $\alpha_1 = a + b, \alpha_2 = ab$. Khi đó $f(a, b) = 4[\alpha_1{}^2 - \alpha_2]^3 - 27\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2$ chia hết cho $\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2$. Vậy $f(a, b) = [\alpha_1{}^2 - 4\alpha_2][2\alpha_1 + \alpha_2] \geqslant 0$.

Ví dụ 1.3. Cho hai đa thức
$f(x) = x^{12} - x^{11} - +3x^3 - x^2 + 23x + 30;$
$g(x) = x^3 + 2x + m$
Hãy xác định các giá trị nguyên m sao cho tồn tại đa thức $q(x)$ để $f(x) = g(x)q(x)$ với mọi $x \in R$

Bài giải: Ta có $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với mọi $x \in R$
trong đó $r(x) = ax^2 + bx + c$. Ta cần tìm m để $r(x) \equiv 0$, tức là $a = b = c$. Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ ta thu được $r(x) = (m^3 + 6m^2 - 32m + 15)x^2 + (5m^3 - 24m^2 + 16m + 33)x + m^4 - 6m^3 + 4m^2 + 5m + 30$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} m^3 + 6m^2 - 32m + 15 = 0 \\ 5m^3 - 24m^2 + 16m + 33 = 0 \\ m^4 - 6m^3 + 4m^2 + 5m + 30 = 0. \end{cases}$$

ta thu được $m = 3$.

1.2. Vành các chuỗi luỹ thừa hình thức

Mục này tập trung nghiên cứu vành các chuỗi luỹ thừa hình thức một biến trên một trường . Ký hiệu

$$K[[x]] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \mid a_i \in K\} = \Big\{\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i \mid a_i \in K\Big\}.$$

Mỗi phần tử $f \in K[[x]], f = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ với $x^0 = 1$, được gọi là một chuỗi luỹ thừa hình thức của biến x với hệ tử thuộc K. Để biến $K[[x]]$ thành một vành giao hoán có đơn vị ta cần các phép toán sau. Cho $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i, g = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i \in K[[x]]$ ta định nghĩa $f = g$ khi và chỉ khi $a_i = b_i$ cho mọi $i = 0, 1, \ldots$ và

$$f + g \;=\; \sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)x^i, fg = \sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j)x^i.$$

1.2.1. Kết quả chính

Mệnh đề 1.1. Với các phép toán trên, $K[[x]]$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị .

Chứng minh:

Việc kiểm tra các tiên đề của vành là thoả mãn.

Định lý 1.5. Chuỗi luỹ thừa hình thức $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ là khả nghịch khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$.

Chứng minh:

Chuỗi luỹ thừa hình thức $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ là khả nghịch của $K[[x]]$ khi và chỉ khi chuỗi luỹ thừa hình thức $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_ix^i$ sao cho $f(x)g(x) = 1$. điều này tương đương với hệ $a_0b_0 = 1, \sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j = 0$ cho mọi $i = 1, 2, \ldots$.

Coi các b_j là ẩn và hệ giải được khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$.
Chuỗi $g(x)$ được gọi là *nghịch đảo* của $f(x)$ và đôi khi viết $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
Chuỗi $f(x)$ được gọi là chuỗi *hữu tỷ* nếu có $p(x), q(x) \in K[x]$ để $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ hay $f(x)q(x) = p(x)$ trong $K[[x]]$. Nếu $q(0) = 1$, bậc của $f(x)$ là $\deg f(x) = \deg p(x) - \deg q(x)$. Nếu tồn tại hàm (đại số hoặc siêu việt) $F(x)$ sao cho $f(x) = F(x)$ thì
$F(x)$ được gọi là *công thức đóng* của chuỗi $f(x)$.

Định nghĩa 1.1. Giả sử $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Tổng $f(\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i$ được gọi là một tổng vô hạn. Nếu tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \alpha^i$ là một số hữu hạn A thì A được gọi là giá trị của chuỗi luỹ thừa hình thức $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ tại $x = \alpha$. Đôi khi A còn được gọi là giá trị của tổng vô hạn $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i$.

Trong vành $K[[x]]$ người ta quan tâm tới tính hữu tỷ và công thức đóng của chuỗi để nghiên cứu tổng (nếu nó tồn tại) hay các hệ số của biểu diễn chuỗi. Khi nào cần tính một tổng cụ thể ta sẽ xét tới tính hội tụ và tính giá trị của chuỗi.
Với một hàm $f(x)$ bất kỳ xác định tại $x = a$, ta biểu diễn nó qua chuỗi luỹ thừa hình thức $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ để có thể coi nó như một chuỗi luỹ thừa $K[[x]]$ và đôi khi ta còn coi hàm này như một chuỗi luỹ thừa hình thức khi không quan tâm tới tính hội tụ chuỗi.

Với $x \in \mathbb{R}$, khai triển thành một chuỗi luỹ thừa của một số hàm đơn