ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
– – – – – – – – – – –

ĐỖ VĂN CHUNG

SỐ MŨ ĐẶC TRƯNG VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ VĂN CHUNG

SỐ MŨ ĐẶC TRƯNG VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 0112**

Giáo viên hướng dẫn:
PGS. TS TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN, 2012

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán-Tin, Ban Giám hiệu, Phòng Đào nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

MỞ ĐẦU

Năm 1892, Lyapunov đã đưa ra và sử dụng khái niệm *số mũ đặc trưng* để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính. Khái niệm số mũ đặc trưng Lyapunov đã được Hoàng Hữu Đường mở rộng thành khái niệm *số mũ vectơ đặc trưng* (chỉ số vectơ đặc trưng) để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân trong trường hợp tới hạn vào những năm 1965 - 1982.

Bắt đầu từ những năm 1980, do nhu cầu thực tiễn và phát triển lý thuyết, phương trình vi phân đại số đã được chú ý và nghiên cứu sâu rộng. Nhiều tác giả Việt Nam: GS. Phạm Kỳ Anh, GS. Nguyễn Đình Công, GS. Nguyễn Hữu Dư, PGS. Vũ Hoàng Linh, TS. Lê Công Lợi, GS. Vũ Ngọc Phát, PGS. Cấn Văn Tuất... đã tham gia nghiên cứu và giải quyết các vấn đề khác nhau của phương trình vi phân đại số.

Vấn đề sử dụng lý thuyết số mũ đặc trưng của Lyapunov để nghiên cứu các tính chất định tính của phương trình vi phân đại số đã được Nguyễn Đình Công và Hoàng Nam nghiên cứu trong [2], [3], [8] và[9].

Trong luận văn, chúng tôi đặt vấn đề sử dụng khái niệm vectơ đặc trưng của Hoàng Hữu Đường để nghiên cứu phương trình vi phân đại số với thành phần đầu chính thường. Các vấn đề luận văn quan tâm là:

1) Đưa ra khái niệm vectơ đặc trưng của nghiệm của phương trình vi phân đại số tuyến tính chính qui chỉ số 1 với thành phần đầu chính thường; trình bày mối quan hệ giữa vectơ đặc trưng của nghiệm của phương trình vi phân đại số và vectơ đặc trưng của nghiệm của phương trình vi phân thường tương ứng.

2) Hệ cơ bản chuẩn tắc và phổ của phương trình vi phân đại số tuyến tính chính qui chỉ số 1.

3) Hệ chính qui cấp m.

4) Định nghĩa sự ổn định (cấp m) của các vectơ đặc trưng của phương trình vi phân đại số thuần nhất đối với các nhiễu động tuyến tính và phi tuyến. Các kết quả nhận được trong luận văn tương tự các kết quả tương ứng trong [4].

Luận văn gồm phần Mở đầu, 3 chương, phần Kết luận và các tài liệu tham khảo.

Trong chương 1, chúng tôi nhắc lại khái niệm số mũ đặc trưng; trình bày lại khái niệm vectơ đặc trưng của hàm số và ma trận hàm cùng các chứng minh một cách chi tiết một số tính chất của vectơ đặc trưng.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày cách phân rã hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1 và chỉ số 2 dựa theo [12]. Đồng thời cũng đưa ra khái niệm vectơ đặc trưng của nghiệm, phổ của hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1, hệ cơ bản chuẩn tắc cũng như hệ chính qui cấp m dựa trên sự mở rộng các khái niệm tương ứng của hệ phương trình vi phân tuyến tính trong [8].

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu sự ổn định tiệm cận mũ của nghiệm tầm thường của hệ phương trình vi phân đại số với thành phần đầu chính thường và định nghĩa vectơ đặc trưng ổn định.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 10 năm 2012

Người thực hiện

Đỗ Văn Chung

Chương 1

Vectơ đặc trưng

Năm 1982 trong luận án Tiến sĩ khoa học của mình, Hoàng Hữu Đường đã đưa ra khái niệm vectơ đặc trưng là mở rộng khái niệm số mũ đặc trưng Lyapunov và áp dụng vectơ đặc trưng nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân trong trường hợp tới hạn. Trước tiên chúng ta nhắc lại khái niệm số mũ Lyapunov (số mũ đặc trưng) của hàm số, ma trận hàm và một số tính chất cơ bản của số mũ Lyapunov.

1.1 Số mũ Lyapunov

Xét phương trình vi phân tuyến tính $\dot{x} = \alpha x, t \geq 0$ với điều kiện ban đầu $x(0) = x_0$ có nghiệm là

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}. \qquad (*)$$

Với $\alpha > 0$ thì $x(t) \longrightarrow +\infty$. Ta nói nghiệm $x \equiv 0$ của phương trình (*) là *không ổn định*. Với $\alpha = 0$ thì $x(t) \equiv x_0, \forall t \geq 0$. Ta nói nghiệm $x \equiv 0$ của phương trình (*) là *ổn định (không ổn định tiệm cận)*. Với $\alpha < 0$ thì $x(t) \longrightarrow 0$ khi $t \longrightarrow +\infty$. Ta nói nghiệm $x \equiv 0$ của phương trình (*) là *ổn định tiệm cận* (theo Lyapunov). Như vậy số α đặc trưng cho tính ổn định của nghiệm $x \equiv 0$ của phương trình (*).

Dựa trên quan sát này, Lyapunov đưa ra khái niệm *số mũ đặc trưng* nhằm nghiên cứu tính ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân.

Xét hàm số thực $f(t) = e^{\alpha t}$, trong đó α là số thực. Số α đặc trưng cho tốc độ tăng trưởng của hàm $e^{\alpha t}$.

Từ nay về sau, vì ta chỉ xét $t \to +\infty$ nên để cho gọn, khi $t \to +\infty$ ta chỉ viết $t \to \infty$.

Ta có thể viết $|f(t)| = e^{\alpha(t).t}$, trong đó $\alpha(t) = \dfrac{1}{t}\ln|f(t)|$. Như vậy, để so sánh sự tăng trưởng của hàm $|f(t)|$ với hàm mũ, điều cần thiết là phải xem xét giá trị của hàm $\alpha(t)$, trên cơ sở đó chúng ta đưa vào khái niệm số mũ đặc trưng của hàm số như sau.

Định nghĩa 1.1. [10] *Giả sử $f(.)$ là hàm nhận giá trị thực và xác định trên khoảng $J = [t_0, +\infty)$. Số (hoặc giá trị $+\infty, -\infty$) xác định bởi công thức*

$$\chi(f) := \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln|f(t)| \tag{1.1}$$

được gọi là số mũ Lyapunov (số mũ đặc trưng) của hàm số $f(.)$.

Nói chung số mũ Lyapunov có thể hữu hạn hoặc vô hạn, nhưng sau này chúng ta chủ yếu xét trường hợp số mũ Lyapunov là hữu hạn. Chúng ta qui ước $\ln 0 = -\infty$, do đó nếu $f(t) \equiv 0$ thì $\chi(f) = -\infty$.

Định lý 1.1. [10] *Nếu $\chi(f) = \alpha \neq \pm\infty$ thì*

1) Với mỗi $\epsilon > 0$ ta có $f(t) = o\big(e^{(\alpha+\epsilon)t}\big)$, nghĩa là

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|f(t)|}{e^{(\alpha+\epsilon)t}} = 0; \tag{1.2}$$

2) $\overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{|f(t)|}{e^{(\alpha-\epsilon)t}} = \infty$, nghĩa là tồn tại dãy $t_k \to \infty$ sao cho

$$\lim_{t_k\to\infty}\frac{|f(t_k)|}{e^{(\alpha-\epsilon)t_k}} = \infty. \tag{1.3}$$

Ngược lại, nếu có một số α nào đó mà với mỗi $\epsilon > 0$ bất kỳ ta đều có (1.2) thì $\chi(f) \le \alpha$; nếu có (1.3) thì $\chi(f) \ge \alpha$. Cuối cùng, nếu có cả hai công thức (1.2) và (1.3) thì $\chi(f) = \alpha$.

Như vậy, nếu $\chi(f) = \alpha$ thì khi $t \to \infty$ hàm số $y = |f(t)|$ tăng chậm hơn bất kỳ một hàm mũ $y_1 = e^{(\alpha+\epsilon)t}$ với $\epsilon > 0$ bất kỳ. Hơn nữa, hàm $|f(t)|e^{-(\alpha+\epsilon)t} \to 0$ và theo một dãy $t_k \to \infty$ nó tăng nhanh hơn hàm $y_2 = e^{(\alpha-\epsilon)t}$ và hàm $|f(t)|e^{(-\alpha+\epsilon)t}$ không bị chặn.

Định nghĩa 1.2. [10] *Hàm $f(t)$ được gọi là có số mũ đặc trưng đúng nếu tồn tại giới hạn hữu hạn* $\chi(f) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \ln |f(t)|$.

Sau đây chúng ta nhắc lại một số tính chất cơ bản của số mũ đặc trưng (xem [1]).

Giả sử $f_1(.), \ldots, f_m(.)$ là các hàm số nhận giá trị thực xác định trên $J = [t_0, \infty)$, khi đó

i) $\chi(f) = \chi(|f|)$.

ii) $\chi(cf) = \chi(f)$ với mọi số thực $c \neq 0$.

iii) Với $c_1, \ldots, c_m$ là các hằng số thực bất kỳ thì $\chi\left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i\right) \leq \max\limits_{1\leq i\leq m} \chi(f_i)$ và nếu tồn tại $c_k \neq 0$ sao cho $\chi(f_k) > \chi(f_j)$ với mọi
$j \neq k, (j = 1, \ldots, m; 1 \leq k \leq m)$ thì $\chi\left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i\right) = \chi(f_k)$.

iv) $\chi\left(\prod\limits_{i=1}^{m} f_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \chi(f_i)$.

Giả sử $F(.) = [f_{jk}(.)]$ là $n \times q$ ma trận hàm xác định trên J.

Định nghĩa 1.3. [10] *Số (hoặc giá trị $\pm\infty$)* $\chi(F) := \max\limits_{j,k} \chi(f_{jk}(t))$ *được gọi là số mũ Lyapunov của ma trận hàm $F(.)$.*

Số mũ Lyapunov của ma trận hàm cũng có một số tính chất tương tự số mũ Lyapunov của vectơ hàm.

i) Nếu $F(.)$ là ma trận vuông thì $\chi(F^T) = \chi(F)$ với $F^T(t)$ là ma trận chuyển vị của ma trận $F(t)$ với $t \in J$.

ii) $\chi(F) = \chi(||F||)$.

ii) Nếu $F_1(.), \ldots, F_m(.)$ là các $n \times n$ ma trận hàm xác định trên