ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HẠNH

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI P_0 ÁNH XẠ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 36

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TS NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân là lớp bài toán nảy sinh từ nhiều vấn đề của toán học ứng dụng như phương trình vi phân, các bài toán vật lý toán, tối ưu hóa. Ngoài ra nhiều vấn đề thực tế như bài toán cân bằng mạng giao thông đô thị, mô hình cân bằng kinh tế...đều có thể mô tả được dưới dạng của một bất đẳng thức biến phân. Rất tiếc rằng bài toán bất đẳng thức biến phân, nói chung, lại là *bài toán đặt không chỉnh,* tức nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu. Vì thế đặt ra yêu cầu phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được lại càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.

Cho K và V là những tập hợp lồi, khác rỗng trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq V$, cho $G : V \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ. Kí hiệu $\langle a, b\rangle$ là tích vô hướng của các phần tử a, b trong $\mathbb{R}^n$.
Xét bài toán bất đẳng thức biến phân: tìm $x^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(x^*), x - x^*\rangle \geq 0, \forall x \in K. \tag{0.1}$$

Mục đích của luận văn nhằm trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân (0.1) với P_0 ánh xạ, đồng thời trình bày áp dụng của kết quả trên cho hai mô hình kinh tế tổng quát đó là mô hình cân bằng Walrasian và mô hình cân bằng Oligopolistic.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu về toán tử đơn điệu trong đó P_0 ánh xạ là một trường hợp đặc biệt nếu chúng ta xét trong không gian hữu hạn chiều. Đồng thời trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.

Trong chương 2 sẽ trình bày phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với P_0 ánh xạ, đồng thời trình bày áp dụng của kết quả trên cho hai mô hình kinh tế tổng quát đó là mô hình cân bằng Walrasian và mô hình cân bằng Oligopolistic.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TS Nguyễn Bường-Viện Công nghệ Thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, người đã hướng dẫn, chỉ dạy tận tình để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo công tác tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin cảm ơn cơ quan, bạn bè đồng nghiệp, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Tác giả

Phạm Thị Hạnh

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Trong chương này chúng tôi trình bày khái quát những kiến thức về toán tử đơn điệu, bất đẳng thức biến phân, bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu. Các kết quả chủ yếu được trích dẫn trong các tài liệu [1], [4], [5].

1.1.1 Toán tử đơn điệu

Cho X là không gian Banach phản xạ với không gian liên hợp của nó là X^*. Cả hai có chuẩn được ký hiệu là $\| \, . \, \|$ và giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ tại điểm $x \in X$ được ký hiệu bởi $\langle x^*, x\rangle$. Cho toán tử A với miền xác định là $D(A) \subseteq X$ và miền ảnh $R(A) \subseteq X^*$.

Định nghĩa 1.1. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in D(A).$$

Toán tử A được gọi là đơn điệu chặt nếu dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$.

Ví dụ 1.1. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn điệu nếu nó đồng biến.

Định nghĩa 1.2. *Tập hợp*

$$Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\}$$

gọi là đồ thị của toán tử A.

Khái niệm về toán tử đơn điệu cũng có thể được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ của toán tử A trong không gian tích $X \times X^*$.

Định nghĩa 1.3. *Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu*

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in X, x^* = A(x), y^* = A(y).$$

Tập $Gr(A)$ được gọi là tập đơn điệu nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức trên.

Định nghĩa 1.4. *Nếu $Gr(A)$ không chứa trong một tập đơn điệu nào khác trong $X \times X^*$ thì toán tử A được gọi là toán tử đơn điệu cực đại.*

Ví dụ 1.2. Toán tử $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 39 & 7 & 32 & -20 \\ 7 & 30 & 34 & 7 \\ 32 & 34 & 58 & -5 \\ -20 & 7 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

có định thức khác 0 là đơn điệu. Khi đó, A là toán tử đơn điệu cực đại.

Định nghĩa 1.5. *Nếu với mọi $x \in X$ ta có $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ thì A được gọi là toán tử xác định không âm, ký hiệu là $A \geq 0$.*

Nhận xét 1.1. Nếu A là một toán tử tuyến tính trong không gian Banach X thì tính đơn điệu tương đương với tính xác định không âm của toán tử.

Ví dụ 1.3. Toán tử $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 9 & 5 & 28 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 20 \\ 9 & 5 & 10 & 4 & 28 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 20 \\ 28 & 20 & 28 & 20 & 96 \end{pmatrix}$$

là xác định không âm.

Định nghĩa 1.6. *Toán tử A được gọi là d-đơn điệu, nếu tồn tại một hàm không âm $d(t)$, không giảm với $t \geq 0, d(0) = 0$ và thỏa mãn tính chất*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq [d(\| x \|) - d(\| y \|)](\| x \| - \| y \|), \forall x, y \in D(A).$$

Định nghĩa 1.7. *Toán tử A được gọi là đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0, \delta(0) = 0$ và*

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \delta(\| x - y \|), \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = C_A t^2$ với C_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là đơn điệu mạnh.

Nhận xét 1.2. Nếu toán tử A có tính chất tuyến tính thì A được gọi là đơn điệu mạnh nếu

$$\langle Ax, x \rangle \geq m_A \| x \|^2, \ m_A > 0, \forall x \in D(A).$$

Ví dụ 1.4. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = 2012x$ là toán tử tuyến tính đơn điệu mạnh.

Cho L là tập con nào đó của $N = \{1, ..., n\}$. A_L là ma trận đường chéo cấp $n.n$ trong đó các phần tử trên đường chéo được cho bởi $a_{ii} = \begin{cases} > 0 \text{ nếu } i \in L, \\ = 0 \text{ nếu } i \notin L. \end{cases}$
Khi đó A_N là một ma trận đường chéo xác định dương. Nếu $a_{ii} = 1 \quad \forall i$, thì $A_N = I_n$ là ma trận đơn vị trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.8. *Ma trận A cỡ $n.n$ được gọi là*
a) P-ma trận nếu nó có các định thức con chính dương;
b) P_0-ma trận nếu nó có các định thức con chính không âm;
c) Z-ma trận nếu nó có các phần tử ngoài đường chéo không dương;
d) M-ma trận nếu nó có các phần tử ngoài đường chéo không dương và tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} có các phần tử không âm;
e) M_0- ma trận nếu nó là P_0-ma trận và một Z-ma trận.

Nhận xét 1.3. A là M-ma trận khi và chỉ khi $A \in P \cap Z$. Suy ra, mỗi M- ma trận là một P-ma trận, nhưng khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát.

Mệnh đề sau đưa ra tiêu chuẩn cho một ma trận A là một M-ma trận hoặc M_0-ma trận.

Mệnh đề 1.1. *Giả sử rằng A là một Z-ma trận. Nếu tồn tại một véc tơ $x > 0$ thỏa mãn $Ax > 0$ (hoặc $Ax \geq 0$) thì A là một M-ma trận (hoặc một M_0 ma trận).*

Định nghĩa 1.9. *Cho U là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$. Ánh xạ $F : U \to \mathbb{R}^n$ được gọi là*

a) P-ánh xạ nếu $\max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > 0$ với mọi $x, y \in U, x \neq y$;

b) P-ánh xạ chặt nếu tồn tại $\gamma > 0$ thỏa mãn $F - \gamma I_n$ là một P-ánh xạ;

c) P-ánh xạ đều nếu tồn tại $\tau > 0$ thỏa mãn

$$\max_{1 \leq i \leq n}(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq \tau \parallel x - y \parallel^2$$

với mọi $x, y \in U$;

d) P_0-ánh xạ nếu với mọi $x, y \in U, x \neq y$ tồn tại một chỉ số i thỏa mãn $x_i \neq y_i$ và $(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0$.

Thực tế, nếu ánh xạ F affin, tức là $F(x) = Ax + b$ thì F là một P-ánh xạ (P_0-ánh xạ) nếu và chỉ nếu Jacobi $\bigtriangledown F(x) = A$ là một P-ma trận (P_0-ma trận). Trong trường hợp không tuyến tính, nếu Jacobi $\bigtriangledown F(x)$ là một P-ma trận thì F là một P-ánh xạ, tuy nhiên điều khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát. Ngoài ra, Nếu F là một P-ánh xạ chặt thì Jacobi $\bigtriangledown F(x)$ là một P-ma trận.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày thêm về mối quan hệ giữa P_0 và P-ánh xạ chặt.

Bổ đề 1.1. *Nếu $F : U \to \mathbb{R}^n$ là một P_0-ánh xạ và $\varepsilon > 0$ thì $F + \varepsilon I_n$ là một P-ánh xạ chặt.*

Chú ý rằng, mỗi P-ánh xạ đều là một P-ánh xạ chặt nhưng điều khẳng định ngược lại là không đúng trong trường hợp tổng quát.

1.1.2 Bất đẳng thức biến phân

Cho K và V là những tập hợp lồi, khác rỗng trong không gian Euclid thực $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq V$, cho $G : V \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ. Kí hiệu $\langle a, b \rangle$ là tích vô hướng của các phần tử a, b trong $\mathbb{R}^n$.

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân: tìm $x^* \in K$ thỏa mãn

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K. \tag{1.1}$$

Ký hiệu K^* là tập nghiệm của bài toán (1.1). Chúng ta sẽ xét bài toán (1.1) với các giả thiết:

(A_1) $G : V \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục và V là một tập con lồi, khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

(A_2) Cho K là một hộp, tức là,

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i \subseteq V,$$

trong đó $K_i = [\alpha_i, \beta_i] \subseteq [-\infty, +\infty], \quad \forall i = 1, ..., n$.

Nhận thấy rằng K hiển nhiên là một tập đóng, lồi, khác rỗng. Nếu thêm điều kiện $\beta_i < +\infty, \forall i \in N$ thì K cũng là một tập bị chặn.

Mệnh đề 1.2. *Cho (A_1) và (A_2) là đúng và cho G là một P-ánh xạ chặt. Khi ấy, bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm.*

Mệnh đề 1.3. *Cho (A_1) và (A_2) là đúng. Nếu G là một P-ánh xạ và K là một tập hợp bị chặn thì bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm.*

Chúng ta sẽ xét thêm giả thiết sau:

(A_3) Giả sử rằng tồn tại những tập hợp $\widetilde{D} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ sao cho với mỗi điểm $y \in K \setminus D$ tồn tại một điểm $x \in \widetilde{D} \cap K$ thỏa mãn

$$\max_{i=1,...,n} G_i(y)(y_i - x_i) > 0. \tag{1.2}$$

Từ định nghĩa này chúng ta sẽ nhận ngay được tập nghiệm đặc trưng sau:

Bổ đề 1.2. *Nếu (A_1)-(A_3) thỏa mãn và $K^* \neq \emptyset$ thì $K^* \subseteq K \cap D$.*

Mệnh đề 1.4. *Giả sử rằng* (A_1)-(A_3) *thỏa mãn với* $D = K^*, \widetilde{K}^*$ *là tập nghiệm của bài toán (1.1), ở đó* K *được thay thế bởi tập hợp* $\widetilde{K} = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{K}_i, \widetilde{K}_i$ *là một tập đóng, lồi, khác rỗng với mỗi* $i = 1, ..., n$*. Nếu* $\widetilde{D} \cap K \subseteq \widetilde{K} \subseteq K$ *thì* $\widetilde{K}^* = \widetilde{K} \cap K^*$.

Chứng minh

Rõ ràng, $\widetilde{K} \cap K^* \subseteq \widetilde{K}^*$. Giả sử rằng tồn tại một điểm $y \in \widetilde{K}^* \setminus K^*$ thì $y \in \widetilde{K} \setminus D$. Áp dụng (A_3), suy ra tồn tại một điểm $x \in \widetilde{D} \cap K \subseteq \widetilde{K}$ sao cho (1.2) đúng, nghĩa là $y \notin \widetilde{K}^*$, mâu thuẫn với giả thiết, từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.5. *Giả sử rằng* (A_1)-(A_3) *thỏa mãn và* D *trong* (A_3) *bị chặn. Khi ấy*
i) Bài toán (1.1) là giải được, và $K^* \subseteq K \cap D$;
ii) Nếu thêm điều kiện G *là một* P*-ánh xạ thì* K^* *là tập hợp có một phần tử.*

1.2 Bài toán đặt không chỉnh

1.2.1 Khái niệm về bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh

Khái niệm về bài toán đặt chỉnh được J. Hadamard đưa ra khi nghiên cứu về ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình elliptic cũng như parabolic.

Việc tìm nghiệm x của bất kì một bài toán nào cũng phải dựa vào dữ kiện ban đầu f, có nghĩa là $x = R(f)$. Ta sẽ coi nghiệm cũng như các dữ kiện đó là các phần tử thuộc không gian X và Y với các khoảng cách tương ứng là $\rho_X(x_1, x_2)$ và $\rho_Y(f_1, f_2)$, $x_1, x_2 \in X, f_1, f_2 \in Y$.

Định nghĩa 1.10. *Giả sử ta đã có khái niệm thế nào là nghiệm của một bài toán. Khi đó, bài toán tìm nghiệm* $x = R(f)$ *được gọi là ổn định trên cặp không gian* (X, Y)*, nếu với mỗi số* $\varepsilon > 0$ *có thể tìm được một*