ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN TRỌNG THƯỞNG

CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học:
TS: NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN, - 2012

Mục lục

Mở đầu.

Các định lý về hàm khả vi đóng một vai trò quan trọng trong giải tích toán học và thường xuyên được khai thác trong các kỳ thi Olympic quốc gia, quốc tế, kỳ thi Olympic sinh viên. Đây là một công cụ rất hiệu lực trong việc giải các bài toán liên quan đến sự tồn tại nghiệm và các tính chất nghiệm của các dạng phương trình khác nhau. Việc sử dụng định nghĩa đạo hàm, khai triển Taylor, quy tắc Lopitan vào các bài toán tính giới hạn, xấp xỉ là rất hữu hiệu. Luận văn này trình bày tương đối đầy đủ các kiến thức về hàm liên tục, hàm khả vi, các định lý về hàm khả vi. Đưa ra một số ứng dụng của chúng vào việc khảo sát tính chất nghiệm phương trình, các bài toán về bất đẳng thức. Sử dụng đạo hàm, khai triển Taylor, quy tắc Lopitan tính giới hạn....

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ sở về khái niệm hàm liên tục, khái niệm đạo hàm, hàm khả vi, các định lý về hàm khả vi quy tắc Lopitan, khai triển Taylor.

Chương 2: Một số ứng dụng của định lý về hàm khả vi. Trình bày các ứng dụng để giải các bài toán về khảo sát tính chất nghiệm của phương trình, bất đẳng thức, tính giới hạn, tính gần đúng.

Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Tiến sĩ Nguyễn minh Khoa đã giao đề tài và tận tình định hướng cho tác giả hoàn thành luận văn. Đồng thời tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đến hội đồng khoa học trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên, tập thể lớp cao học toán K4C trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên, bạn bè, người thân đã động viên giúp đỡ tác giả nghiên cứu học tập.

Mặc dù đã cố gắng học tập nghiên cứu kĩ đề tài, song khó tránh khỏi thiếu sót, hạn chế. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo góp ý của các thầy cô, bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn chỉnh có ý nghĩa hơn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

THÁI NGUYÊN, năm 2012.
Tác giả
Đoàn trọng Thưởng

Chương 1

Những kiến thức cơ sở.

1.1 Hàm liên tục.

1.1.1 Các khái niệm.

Định nghĩa 1.1.1. *Cho tập hợp $X \subset R$, hàm số $f : X \to R$ và điểm $x_0 \in X$. Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $\delta > 0$ (nói chung phụ thuộc vào ε) sao cho với mọi $x \in \{x \in X| \, |x - x_0| < \delta\}$ ta đều có $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ thì ta nói hàm f liên tục tại x_0.*

- Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì ta nói f liên tục trên X.

- Hàm f không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại điểm này.

- Giả sử X là một tập hợp số thực $x_0 \in R$ là một điểm tụ của X,f là một hàm số xác định trên X.

Khi đó f liên tục tại điểm x_0, nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Giả sử f là một hàm số xác định trên tập số thực X . Hàm số f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi

$$\forall \{x_n\} \subset \mathrm{X} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Ví dụ 1.1.1. *a) Hàm $f(x) = sinx$ liên tục trên R. Thật vậy giả sử $x_0 \in X$ với mọi $x \in R$ ta có.*

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|$$

Với ε bất kì ta lấy $\delta = \varepsilon$ khi đó

$$\forall x \in R \;\; |x - x_0| < \varepsilon \;\to\; |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

Vậy hàm $f(x) = sinx$ liên tục tại x_0 do đó liên tục trên R

1.1.2 Các tính chất hàm liên tục.

Định lý 1.1.1. *Nếu f và g là hai hàm cùng xác định trên tập hợp X và liên tục tại điểm $x_0 \in X$ thì $\alpha f + \beta g$ (với α và β là hằng số), $f.g$ đều là những hàm liên tục tại x_0. Nếu $g\left(x_0\right) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ cũng là hàm liên tục tại x_0.*

Chứng minh định lý này suy ra từ các tính chất trên của hàm liên tục.

Định lý 1.1.2. *Giả sử A và B là các tập con của R, $f : A \to B$ liên tục tại $x_0 \in A$, $g : B \to R$ liên tục tại $y_0 = f\left(x_0\right) \in B$. Khi đó hàm hợp $g\mathrm{of} : \mathrm{A} \to R$ liên tục tại x_0.*

Chứng minh.

Cho trước $\varepsilon > 0$. Vì g liên tục tại y_0 nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho $\left|g\left(y\right) - g\left(y_0\right)\right| < \varepsilon$ với mọi $y \in B$ thỏa mãn $\left|y - y_0\right| < \eta$. Do f liên tục tại x_0, với $\eta > 0$ nói trên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\left|f\left(x\right) - f(x_0)\right| < \eta$, với mọi $x_0 \in A$ thỏa mãn $\left|x - x_0\right| < \delta$. Khi đó, với mọi $x \in \{x \in A|\, |x - x_0| < \delta\}$ ta có $\left|\left(g\mathrm{of}\right)\left(x\right) - \left(g\mathrm{of}\right)\left(x_0\right)\right| = \left|g(f\left(x\right)) - g\left(f\left(x_0\right)\right)\right| < \varepsilon$.

Vậy $g\mathrm{of}$ liên tục tại x_0.

Định nghĩa 1.1.2. *Hàm $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{R}$ gọi là liên tục bên phải tại điểm $x_0 \in A$ nếu mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A|\, x_0 \leq \mathrm{x} < \mathrm{x_0} + \delta\}$ ta có $\left|f\left(x\right) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.*

Ta nói f liên tục bên trái tại $x_0 \in A$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A|\, x_0 - \delta \leq \mathrm{x} < \mathrm{x_0}\}$ ta có $\left|f\left(x\right) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Các hàm số liên tục bên phải tại x_0 hoặc liên tục bên trái tại x_0 được gọi là liên tục một phía tại x_0.

- Hàm $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{R}$ liên tục tại $x_0 \in A$ khi và chỉ khi f liên tục bên phải và liên tục bên trái tại x_0.

Định nghĩa 1.1.3. *Cho các hàm số $f : [a, b] \to R$. Nếu f liên tục trên (a, b), liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b thì ta nói f liên tục trên đoạn $[a, b]$.*

Định lý 1.1.3. *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trên đó.*

Chứng minh. Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nhưng không bị chặn trên đó. Khi đó với mọi $n \in N^*$ tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $\left|f\left(x_n\right)\right| > n$. Dãy $\left\{x_n\right\}_n$ là dãy bị chặn nên nó chứa một dãy con $\left\{x_{n_k}\right\}_k$ hội tụ đến x_0. Vì $a \leq x_{n_k} \leq b$ với mọi k, nên cho $k \to \infty$ ta suy ra $a \leq x_0 \leq b$. Do f liên tục tại x_0 ta có $f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$, từ đó $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| - \left|f\left(x_0\right)\right|$ $(k \to \infty)$. Mặt khác $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \geq n_k$, vì thế $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \to +\infty$ $(k \to \infty)$ ta đi đến mâu thuẫn. Vậy hàm f bị chặn trên $[a, b]$.

Định lý 1.1.4. *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a,\, b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, tức là tồn tại hai số $x_0,\, x_0' \in [a,\, b]$ sao cho*

$$f\left(x_0\right) = \sup_{x\in[a,\, b]} f(x),\; f\left(x_0'\right) = \inf_{x\in[a,\, b]}(x)$$

Chứng minh. Vì hàm f bị chặn trên đoạn $[a,\, b]$, vì thế tồn tại

$$\sup_{x\in[a,\, b]} f(x) = M, M < +\infty,\, \inf_{x\in[a,\, b]}(x) = m,\, m > -\infty$$

Theo định nghĩa của cận trên đúng, tồn tại dãy $x_n \in [a,\, b]$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = M$. Dãy $\left\{x_n\right\}_n$ là dãy bi chặn nên nó chứa một dãy con $\left\{x_{n_k}\right\}_k$, $x_{n_k} \to x_0 \in [a,\, b]$. Khi đó, do f liên tục, ta có $M = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f\left(x_0\right)$.Vậy hàm f đạt giá trị lớn nhất trên $[a,\, b]$.

Tương tự ta chứng minh tồn tại $x_0' \in [a,\, b]$ sao cho $f\left(x_0'\right) = m$. f đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn

Định lý 1.1.5. *(định lý Bolzano - Cauchy thứ nhất). Giả sử hàm $f : [a,\, b] \to R$ liên tục trên đoạn $[a,\, b]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a,\, b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Định lý này có ý nghĩa hình học rất rõ ràng : nếu một đường cong liên tục đi từ một phía của trục x sang phía kia thì nó cắt trục này.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Đặt $A = \{x \in [a,\, b]\, | f\left(x\right) \le 0\}$. Vì $a \in A$ nên $A \ne \phi$. Gọi $c = \sup A$. Ta chứng minh $f\left(c\right) = 0$. Theo định nghĩa của cận trên đúng tồn tại dãy $\left\{t_n\right\}_n \subset A$ sao cho $\lim\limits_{x\to\infty} t_n = c$. Vì f liên tục tại c nên $f\left(c\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(t_n\right) \le 0$. Do $f(b) > 0$ nên $c \ne b$ và do đó $c < b$. Nếu $f(c) < 0$ thì do f liên tục tai c, $\lim\limits_{x\to c^+} f\left(x\right) = f\left(c\right) < 0$, do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho $c + \delta < b$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in [c,\, c + \delta]$. Đặc biệt $f\left(c + \delta\right) < 0$. Vì thế $c + \delta \in A$, điều này mâu thuẫn với c là lân cận trên của A. Vậy $f(c) = 0$.

Định lý 1.1.6. *(định lý Bolzano - Cauchy thứ hai). Giả sử f liên tục trên $[a,\, b]$. Khi đó f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, tức với mọi số thực λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại $c \in [a,\, b]$ sao cho $f\left(c\right) = \lambda$.*

Chứng minh: Nếu $f(a) = f(b)$ định lý hiển nhiên đúng. Giả sử $f\left(a\right) \ne f\left(b\right)$. Không mất tổng quát ta có thể xem $f(a) < f(b)$. Giả sử λ sao cho $f\left(a\right) < \lambda < f\left(b\right)$. Xét các hàm $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \lambda$. Ta có $g(a) < 0, g(b) > 0$. Theo định lý định lý Bolzano - Cauchy thứ nhất tồn tại $c \in (a,\, b)$ sao cho $g(c) = 0$ hay $f\left(c\right) - \lambda = 0$. Do đó $f\left(c\right) = \lambda$.

1.2 Khái niệm về hàm khả vi.

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận điểm $x_0 \in R$. Cho x_0 một số gia Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia đối số Δx tại điểm x_0.

Định nghĩa 1.2.1. *Nếu tỉ số* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *có giới hạn hữu hạn khi* $\Delta x \to 0$ *thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm* f *đối với* x *tại* x_0 *và được kí hiệu là* $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Khi đó ta nói rằng hàm f *khả vi tại* x_0.

Ví dụ 1.2.1. *Tính đạo hàm của hàm số* $y = x^2$ *tại điểm* $x_0 = 3$.

Giải. Đặt $f(x) = x^2$ ta có

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (3 + \Delta x) - 3^2 = \Delta x (6 + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6$$

Vậy $f'(x_0 = 3) = 6$.

Định nghĩa 1.2.2. *Cho* U *là tập hợp mở trong* R, $f : U \to R$ *là một hàm xác định trên* U. *Hàm* f *được gọi là khả vi trên* U *nếu* f *khả vi tại mọi điểm của* U. *Khi đó hàm số được gọi là đạo hàm của hàm số trên.*

Nếu f' liên tục trên U thì ta nói rằng f khả vi liên tục trên U.

Định lý 1.2.1. *Cho tập hợp mở* $U \subset R$ *và hàm số* $f : U \to R$.

Nếu f *khả vi tại* $x_0 \in U$ *thì*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) h + r(h).h$$

trong đó $r(h) \to 0$ *khi* $h \to 0$.

Chứng minh. Đặt $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = r(h)$

Do f khả vi tại x_0 ra có $r(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Do đó

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) = r(h)$$

Điều kiện cần để hàm f khả vi tại x_0 là f liên tục tại đó.

Chú ý : - Nếu f liên tục tại x_0 thì chưa chắc f khả vi tại đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$, tuy nhiên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ tức là f không khả vi tại $x_0 = 0$.

- Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0.

1.2.1 Các quy tắc tính đạo hàm.

Định lý 1.2.2. *Cho U là tập mở trong R, f và $g : U \to R$ là các hàm khả vi tại $x_0 \in U$ khi đó các hàm $f \pm g$, cf (c bất kỳ thuộc R), $f.g$ và $\frac{f}{g}$ (nếu $g(x_0) \neq 0$) là các hàm khả vi tại x_0 và ta có.*

$$\begin{array}{l} (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (cf)'(x_0) = cf'(x_0) \\ (f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{array}$$

1.2.2 Đạo hàm hàm hợp và đạo hàm hàm ngược.

Định lý 1.2.3. *Cho các tập hợp U, V trong R và các hàm $f : U \to V$, $g : V \to R$. Giả sử f khả vi tại $x_0 \in U$ và g khả vi tại $y_0 = f(x_0) \in V$. Khi đó hàm hợp $g\mathrm{of}$ khả vi tại x_0 và $(g\mathrm{of})(x_0) = g'[f(x_0)].f'(x_0)$.*

Chứng minh: Cho x_0 một số Δx đủ bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó f có số gia Δf; ứng với số gia Δf này hàm số $h = g\mathrm{of}$ có số gia Δh, đó chính là số gia của h ứng với Δx. Nếu $\Delta f \neq 0$ ta có

$$\Delta h = g'(f(x_0))\, \Delta f + r(\Delta f).\Delta f \qquad (1)$$

trong đó $r(\Delta f) \to 0$ khi đó $\Delta f \to 0$. Đẳng thức này cũng đúng khi cả $\Delta f = 0$ vì khi đó

$$\Delta h = g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0)) = g(f(x_0)) - g(f(x_0)) = 0$$

Chia cả hai vế 1 cho Δx ta được

$\frac{\Delta h}{\Delta x} = g'(f(x_0))\frac{\Delta f}{\Delta x} + r(\Delta f).\frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(f(x_0))\, f'(x_0)$ khi $\Delta x \to 0$

Tức là ta có

$$(g\mathrm{of})(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Ví dụ 1.2.2. *Tính* $(\ln|x|)'$, $(x \neq 0)$.

Ta có

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}.(|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x > 0 \\ -\frac{1}{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

Vậy

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0$$

Định lý 1.2.4. *Giả sử*

1) *Hàm số* $f : (a,\, b) \to R$ *liên tục và đơn điệu thực sự trong khoảng* $(a,\, b)$.

2) f *có đạo hàm* $f'(x_0) \neq 0$ *tại* $x_0 \in (a,\, b)$.

Khi đó hàm ngược $g = f^{-1}$ của hàm f có đạo hàm tại điểm $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Chứng minh. Với $y \in (c,\, d) = f[(a,\, b)]\,,\ y \neq y_0$ do g cũng đơn điệu thực sự ta có $x = g(y) \neq g(y_0) = x_0$.

Khi đó $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$.

Khi $y \to y_0$, do hàm ngược g cũng là hàm liên tục, ta có $x \to x_0$.

Từ đó ta có $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$.

Vậy

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

.

Ví dụ 1.2.3. *Một số các hàm ngược sau .*

1) Xét hàm số $y = \arctan x$ hàm này là hàm ngược của hàm của hàm $x = \tan y \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$.

Vậy $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2}$ tức là $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

2) Xét hàm $y = \arcsin x,\ x \in (-1,\, 1)$ hàm này là hàm ngược của hàm $x = \sin y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$ ta có.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (x \in (-1,\, 1))$$

Tương tự ta có.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (x \in (-1,\, 1))$$

$$(arc\tan x) = -\frac{1}{1+x^2}\ (x \in (-\infty,\, +\infty))$$

1.2.3 Đạo hàm một phía.

Định nghĩa 1.2.3. *Cho hàm số* $f : [x_0,\, b] \to R$ *nếu tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{\Delta x\to 0+} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$ *thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm bên phải của* f *tại* x_0 *kí hiệu* $f'_+(x_0)$.

Tương tự, xét $f : [a,\, x_0] \to R$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$ thì được gọi là đạo hàm bên trái của f tại x_0, kí hiệu $f'_{-}(x_0)$.

Nếu U là một lân cận của x_0 và $f : U \to R$ thì các tính chất của giới hạn ta suy ra rằng hàm số f có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại x_0 và hai đạo hàm này bằng nhau.

Ví dụ 1.2.4. *Xét hàm $f(x) = |x|$. Tại điểm $x_0 = 0$ ta có.*

$\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, hay $f_{+}(0) = 1$ và

$\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$, hay $f_{-}(0) = -1$.

Vậy hàm f không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

1.2.4 Vi phân.

Định nghĩa 1.2.4. *Cho tập hợp mở $U \subset R$ và ánh xạ $f : U \to R$ khả vi tại $x_0 \in U$. Ta gọi ánh xạ tuyến tính từ R vào R xác định bởi $f'(x_0)$ là vi phân của f tại x_0, kí hiệu là $df(x_0)$. Như vậy*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0), \text{ với mọi } h \in R.$$

Từ định nghĩa đạo hàm và vi phân ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + 0(h)$$

trong đó $0(h)$ là vô cùng bé cấp hơn h khi $h \to 0$. Nếu $f'(x_0) \neq 0$ ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h) \text{ khi } h \to 0.$$

Giả sử f, g là các hàm khả vi $x_0 \in U$. Ta kí hiệu df, dg là các vi phân của hàm f và g tại x_0. Từ các quy tắc tính đạo hàm ta suy ra các quy tắc sau đây của phép tính vi phân.

$$\begin{aligned} & d(f+g) = df + dg \\ & d(cf) = cdf \\ & d(cf) = df.g + f.d \\ & d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df.g - fdg}{g^2} \quad (g(x_0) \neq 0) \end{aligned}$$

Kí hiệu $h = \Delta x$, vi phân của hàm khả vi $y = f(x)$ tại x được viết lại dưới dạng $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$. Nếu $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$, khi đó $dy = dx = 1\ \Delta x = \Delta x$ và do đó vi phân của hàm $y = f(x)$ có thể viết là

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Công thức này cũng đúng cả khi x là hàm biến độc lập khác. Thật vậy nếu $y = f[\varphi(t)]$ ta có

$$dy = [f(\varphi(t))]'\, dt = f'(x).\varphi'(t)\, dt = f'(x)\, dx$$