ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HẠNH HOA

PHƯƠNG PHÁP NEWTON CẢI TIẾN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN VỚI ĐỘ HỘI TỤ BẬC CAO

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

\- - - - - - - - - - -

NGUYỄN HẠNH HOA

PHƯƠNG PHÁP NEWTON CẢI TIẾN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN VỚI ĐỘ HỘI TỤ BẬC CAO

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.0112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - 2012

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán - Tin, Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã trang bị những kiến thức cơ bản và tạo mọi điều kiện tốt nhất giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy giáo kính mến PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này. Tấm gương đam mê nghiên cứu khoa học, nghiêm túc trong công việc, gần gũi trong cuộc sống của thầy đã giúp cho tôi có niềm tin, ý thức trách nhiệm và quyết tâm cao để hoàn thành luận văn của mình.

Tôi xin gửi lời cảm ơn gia đình và bạn bè, những người đã đồng hành, hết lòng động viên và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập cũng như làm luận văn thạc sĩ này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Hạnh Hoa

Mục lục

Mở đầu

Isaac Newton (1642 - 1727) là một nhà vật lý, nhà thiên văn học, nhà triết học tự nhiên và nhà toán học vĩ đại người Anh. Ông đã xây dựng một công thức giải phương trình phi tuyến $f(x) = 0$ viết năm 1671 và được công bố lần đầu tiên vào năm 1685. Newton tính toán một chuỗi các đa thức sau đó ông đưa đến một nghiệm xấp xỉ của phương trình. Joseph Raphson (1648 - 1715) đã coi phương pháp của Newton hoàn toàn như là một phương pháp đại số và giới hạn việc sử dụng nó cho các đa thức một biến. Tuy nhiên Raphson đã mô tả phương pháp thông qua dãy các xấp xỉ kế tiếp x_n thay vì các chuỗi đa thức phức tạp như Newton. Cách giải thích của Raphson được xem như là đơn giản hơn của Newton và đã được ông công bố vào năm 1690. Ngày nay chúng ta gọi là *phương pháp Newton* (hay *phương pháp Newton – Raphson*) tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình phi tuyến $f(x) = 0$ bằng việc xây dựng một dãy lặp hội tụ tới nghiệm của phương trình.

Phương pháp Newton – Raphson đóng vai trò quan trọng trong khoa học và kĩ thuật, đặc biệt đối với ngành Toán học nói chung và phương pháp số nói riêng. Trong thực tế nó có khả năng ứng dụng rất lớn.

Sau khi phương pháp Newton – Raphson ra đời, việc giải phương trình phi tuyến phát triển rất mạnh mẽ và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực. Giải các bài toán có ý nghĩa thực tế quan trọng, đặc biệt trong giai đoạn hiện nay với sự hỗ trợ của máy tính điện tử việc này càng trở nên có hiệu lực. Điều đó đã thu hút nhiều nhà khoa học tìm hiểu sâu hơn về phương pháp này. Dựa trên cơ sở của phương pháp Newton – Raphson đã có, rất nhiều bài báo được đăng trên các tạp chí nổi tiếng thế giới nói về cách xây dựng những phương pháp cải tiến giải xấp xỉ phương trình phi tuyến với tốc độ hội tụ cao, có thể thực hiện trên máy tính điện tử.

Trong luận văn này, tôi trình bày tổng quan các phương pháp Newton cải tiến có tốc độ hội tụ cao giải gần đúng phương trình phi tuyến cho trường hợp phương trình có nghiệm đơn và phương trình có nghiệm bội. Do khuôn khổ luận văn, phương pháp Newton mở rộng cho hệ phương trình phi tuyến và phương trình trong không gian Banach không được trình bày. Tuy nhiên, trong phần TÀI LIỆU BỔ SUNG chúng tôi có liệt kê các bài báo về phương pháp Newton cho hệ phương trình (trang 77 - 80, các tài liệu [95] - [122]) và phương trình trong không gian Banach (trang 80 - 82, các tài liệu [123] - [145]).

Luận văn gồm phần mở đầu, 2 chương, phần kết luận và các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các phương pháp tìm nghiệm đơn của phương trình phi tuyến. Đồng thời cũng đưa ra định lý về sự hội tụ của các phương pháp và minh họa một số ví dụ.

Chương 2 nhắc lại khái niệm nghiệm bội của phương trình $f(x) = 0$ và đưa ra các phương pháp tìm nghiệm bội của phương trình phi tuyến cùng một số ví dụ minh họa.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Hạnh Hoa

Chương 1

Tổng quan các phương pháp hội tụ bậc cao tìm nghiệm đơn của phương trình phi tuyến

Giải phương trình phi tuyến là một trong những bài toán quan trọng trong giải tích số. Trước hết, chúng ta xét phương trình

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$ được thực hiện theo hai bước:

Bước 1: *Tìm khoảng chứa nghiệm*

Mỗi một phương trình nói chung có thể có nhiều nghiệm. Chúng ta cần tìm khoảng chứa nghiệm (a, b), trong đó phương trình có nghiệm (có duy nhất nghiệm) bằng một trong các tiêu chuẩn sau.

Định lí 1. (Bolzano-Cauchy) *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (a, b).*

Định lí 2. (Hệ quả của Định lí 1) *Giả sử $f(x)$ là một hàm liên tục và đơn điệu ngặt trên đoạn $[a, b]$. Khi đó nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng (a, b).*

Định lí 3. (Hệ quả của Định lí 2) *Giả sử $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ của nó không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$. Khi đó nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng (a, b).*

Bước 2: *Giải gần đúng phương trình*

Sau khi sử dụng ba định lí trên để xác định khoảng chứa nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, chúng ta xét phương pháp giải gần đúng phương trình phi tuyến $f(x) = 0$ trong trường hợp nghiệm đơn. Ở đây $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm phi tuyến trơn có nghiệm đơn x_*, tức là $f(x_*) = 0$ và $f'(x_*) \neq 0$.

Xuất phát từ giá trị ban đầu x_0 thuộc khoảng phân li của nghiệm của phương trình (1.1), các xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi công thức

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Phương pháp Newton - Raphson tìm nghiệm x_* của phương trình (1.1) sử dụng sơ đồ lặp

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.2}$$

Phương pháp lặp này có tốc độ hội tụ bậc hai nhưng chỉ tốt khi $f'(x_*) \neq 0$. Người ta có thể cải tiến phương pháp này trở nên tốt hơn bằng cách nâng tốc độ hội tụ lên cao hơn. Trong chương này, chúng ta trình bày lại nội dung của một số bài báo về sự cải tiến của phương pháp Newton giải gần đúng phương trình phi tuyến với độ hội tụ bậc cao cho trường hợp nghiệm đơn và minh họa qua một số ví dụ tính toán cụ thể. Trường hợp nghiệm bội của phương trình chúng ta sẽ được xét ở Chương 2.

1.1 Phương pháp xấp xỉ tích phân

Xét biểu diễn của hàm $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt. \tag{1.3}$$

Nhiều nhà toán học đã cải tiến phương pháp Newton bằng việc xấp xỉ tích phân trong công thức (1.3) bởi các quy tắc khác nhau và đã thu được không ít những phương pháp lặp tìm nghiệm đơn của phương trình phi tuyến có tốc độ hội tụ cao hơn. Dưới đây chúng tôi trình bày phương pháp giải phương trình $f(x) = 0$ có tốc độ hội tụ bậc cao trong một số bài báo.