ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ LINH

PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ÁNH XẠ GIẢ CO CHẶT

Chuyên nghành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. PHẠM NGỌC ANH

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy PGS.TS Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn các quý thầy giáo, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K4C, các bạn học viên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Phạm Thị Linh

Những ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	: Tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	: Tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	: Không gian số thực n - chiều
$\mathbb{R}^n_+$	: Không gian số thực không âm n - chiều
$x \in C$	: x thuộc tập C
$x \notin C$	: x không thuộc tập C
$\forall x$	: Với mọi x
$\exists x$	: Tồn tại x
$\varnothing$	: Tập hợp rỗng
$\cap$	: Phép giao các tập hợp
$\cup$	: Phép hợp các tập hợp
$x := y$	: x được định nghĩa bằng y
$\langle x, y\rangle$	: Tích vô hướng của x và y
$x^k \rightharpoonup x$	: Dãy $\left\{x^k\right\}$ hội tụ yếu tới x
$x^k \to x$	: Dãy $\left\{x^k\right\}$ hội tụ mạnh tới x
I	: Ánh xạ đồng nhất
$\|x\|$	: Chuẩn của véc tơ x
$[x, y]$	: Đoạn thẳng nối hai điểm x và y

Lời nói đầu

Bài toán cân bằng được mô tả dưới dạng một bất đẳng thức, gọi là bất đẳng thức Ky Fan, lần đầu được áp dụng để nghiên cứu các mô hình cân bằng kinh tế theo khái niệm cân bằng do J. Nash, nhà toán học Mỹ đoạt giải Nobel kinh tế trong những công trình nghiên cứu về cân bằng đưa ra vào năm 1994. Về mặt lý thuyết, như sự tồn tại nghiệm, nhiều kết quả quan trọng đã đạt được cho bài toán cân bằng tổng quát trên các không gian trừu tượng. Tuy nhiên, về mặt thuật toán và các ứng dụng, các kết quả còn hạn chế.

Luận văn này trình bày một số thuật toán để giải bài toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ hữu hạn các ánh xạ giả co chặt. Luận văn gồm mục lục, ba chương, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 sẽ nhắc lại các kiến thức cơ bản nhất của tập lồi và hàm lồi, mà các kết quả này sẽ được sử dụng ở các chương sau. Phần cuối của chương sẽ giới thiệu về bài toán cân bằng, một số ví dụ và cuối cùng sẽ trình bày về ánh xạ giả co chặt, phép chiếu trực giao với các tính chất.

Chương 2 sẽ trình bày thuật toán để giải bài toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm của bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ hữu hạn các ánh xạ giả co chặt với định lý hội tụ mạnh.

Chương 3 là phần ứng dụng. Phần này trình bày về việc áp dụng thuật toán để giải một số bài toán cân bằng với các kết quả tính toán cụ thể. Đây cũng là những đóng góp mới được ứng dụng để giải bài toán cân bằng thông qua sự gắn kết giữa phương pháp dưới đạo hàm và các kỹ thuật điểm bất động.

Chương 1
Một số Khái niệm Cơ bản

Trong luận văn này, ta xét bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của một họ hữu hạn các ánh xạ giả co chặt trên không gian Hilbert thực H. Dưới đây, ta nhắc lại một số khái niệm và các tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân, ... và một số kiến thức liên quan đến bài toán cân bằng, ánh xạ giả co chặt, phép chiếu trực giao cùng với các tính chất tương ứng. Các kiến thức trong chương này được lấy chủ yếu từ các tài liệu [1],[3],[5],[6].

1.1. Tập lồi và các phép toán cơ bản

Định nghĩa 1.1. *Cho C là tập con, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Tập C được gọi là lồi (convex) nếu với mọi $x, y \in C$ và $\lambda \in [0, 1]$, ta có*

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C.$$

Đặc biệt, H và $\emptyset$ là các tập lồi.

Ví dụ 1.1. *Các nửa không gian là các tập lồi. Các tam giác và hình tròn trong mặt phẳng là các tập lồi. Hình cầu đơn vị trong không gian Banach là tập lồi...*

Định nghĩa 1.2. *Một tập hợp là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là tập lồi đa diện (polyhedral convex set) hay khúc lồi.*

Định nghĩa 1.3. *Tập con C khác rỗng trong không gian Hilbert thực H được gọi là nón (cone) nếu*

$$\lambda x \in C, \quad \forall\, x \in C, \forall \lambda > 0.$$

Tập con C khác rỗng trong không gian Hilbert thực H được gọi là nón lồi nếu nó vừa là nón vừa là lồi. Điều đó có nghĩa là

$$\lambda x + \mu y \in C, \quad \forall\, x, y \in C, \forall \lambda, \mu > 0.$$

Ví dụ 1.2. *Tập $\mathbb{R}^n_+$ là nón lồi trong $\mathbb{R}^n$.*

Định nghĩa 1.4. *Cho không gian Hilbert thực H, tập $C \subseteq H$ lồi, khác rỗng và điểm $x^* \in C$. Khi đó, nón pháp tuyến ngoài của C tại x^* (hay còn gọi là nón lồi đóng), kí hiệu $N_C(x^*)$, được xác định bởi*

$$N_C(x^*) := \{p \in H : \langle p, x - x^* \rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in C\}.$$

1.2. Hàm lồi

Định nghĩa 1.5. *Cho không gian Hilbert thực H, tập $C \subseteq H$ và hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Khi đó, các tập hợp*

$$dom\, f := \{x \in C : f(x) < +\infty\},$$

$$epi f := \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant \alpha\},$$

tương ứng, được gọi là miền hữu hiệu (effective domain) và trên đồ thị (epigraph) của f.

Hàm f được gọi là chính thường (proper) trên C nếu

$$dom\, f \neq \emptyset,\ f(x) > -\infty, \quad \forall\, x \in C.$$

Định nghĩa 1.6. *Cho không gian Hilbert thực H và tập $C \subseteq H$. Hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ được gọi là lồi (convex) trên C nếu trên đồ thị của nó là tập con lồi của $H \times \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là lõm (concave) nếu $-f$ là lồi.*

Bổ đề 1.1. *Cho không gian Hilbert thực H và tập $C \subseteq H$. Nếu hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ lồi trên C thì miền hữu hiệu của f là tập lồi.*

Mệnh đề 1.1. *Cho không gian Hilbert thực H và tập $C \subseteq H$. Khi đó, hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là lồi trên C nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in C,\ \lambda \in [0,1]$, ta có*

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Chứng minh. Giả sử f là hàm lồi, không mất tính tổng quát có thể coi $\lambda \in (0,1)$. Không thể xảy ra trường hợp $f(x) < +\infty, f(y) < +\infty$ mà $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = +\infty$, bởi vì *dom* f lồi. Hơn nữa, với mọi $x, y \in$ *dom* f, thì $[x, y] \subset$ *dom* f. Vì $\lambda \in (0,1)$ nên $f(x) = +\infty$, suy ra $\lambda f(x) = +\infty$. Nếu x hoặc $y \notin$ *dom* f thì $f(x) = +\infty$ hoặc $f(y) = +\infty$.
Mặt khác, vì *epi* f lồi nên với mọi $(x, \alpha), (y, \beta) \in epi f, \lambda \in (0,1)$, ta có

$$\lambda (x, \alpha) + (1-\lambda)(y, \beta) = (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in epi\, f$$
$$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$
$$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(lấy $\alpha = f(x), \beta = f(y)$).

Ngược lại, giả sử với mọi $x, y \in C, \lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Lấy $(x, \alpha), (y, \beta) \in epi f, \lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$
$$\Rightarrow (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \in epi\, f$$
$$\Leftrightarrow \lambda (x, \alpha) + (1-\lambda)(y, \beta) \in epi\, f.$$

□

Ví dụ 1.3. *Cho C là tập con lồi, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, hàm chỉ (indicator funtion) trên C*

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C; \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C; \end{cases}$$

là một hàm lồi.

Định nghĩa 1.7. *Cho không gian Hilbert thực H và tập $C \subseteq H$. Hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là lồi chặt (strict convex) trên C nếu với mọi $x, y \in C$, $x \neq y$, $\lambda \in (0, 1)$, ta có*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Ví dụ 1.4. *Cho không gian Hilbert thực H. Khi đó, với mọi $x \in H$ hàm*

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

là một hàm lồi chặt trên H.

Định nghĩa 1.8. *Cho không gian Hilbert thực H, tập $C \subseteq H$ và hàm lồi $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó, dưới vi phân (subdifferential) của f tại x^*, ký hiệu là $\partial f(x^*)$, được xác định bởi*

$$\partial f(x^*) := \{p \in H : f(x) - f(x^*) \geqslant \langle p, x - x^* \rangle, \ \forall x \in C\}.$$

Hàm f được gọi là khả dưới vi phân (subdifferentiable) trên C nếu

$$\partial f(x) \neq \emptyset, \ \forall x \in C.$$

Ví dụ 1.5. *(Dưới vi phân của hàm chỉ)*
Cho C là tập con lồi, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Xét hàm chỉ trên C

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C; \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\partial \delta_C(x^*) = N_C(x^*), \quad \forall x^* \in C.$$

Chứng minh. Nếu $x^* \in C$ thì $\partial \delta_C(x^*) = 0$ và

$$\begin{aligned} \partial \delta_C(x^*) &= \{p \in H : \partial \delta_C(x) \geqslant \langle p, x - x^* \rangle, \ \forall x \in C\}. \\ &= \{p \in H : 0 \geqslant \langle p, x - x^* \rangle, \ \forall x \in C\} \\ &= N_C(x^*). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.6. *(Dưới vi phân của hàm lồi thuần nhất dương)*
Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm lồi thuần nhất dương, tức là hàm lồi f thỏa mãn

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó,

$$\partial f(x^*) = \{p \in \mathbb{R}^n : \quad \langle p, x^* \rangle = f(x^*), \langle p, x \rangle \leqslant f(x), \forall x \in C\}.$$

Chứng minh. Nếu $p \in \partial f(x^*)$ thì

$$\langle p, x - x^* \rangle \leqslant f(x) - f(x^*), \quad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

Thay $x = 2x^*$ vào (1.1), ta có

$$\langle p, x^* \rangle \leqslant f(x^*). \tag{1.2}$$

Thay $x = 0$ vào (1.1), ta nhận được

$$-\langle p, x^* \rangle \leqslant -f(x^*). \tag{1.3}$$

Kết hợp (1.2) và (1.3), ta có $\langle p, x^* \rangle = f(x^*)$.
Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \langle p, x - x^* \rangle &= \langle p, x \rangle - \langle p, x^* \rangle \\ &= \langle p, x \rangle - f(x^*). \end{aligned}$$

Do đó $\langle p, x \rangle \leqslant f(x), \quad \forall x \in C$.

Ngược lại, nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn

$$\langle p, x^* \rangle = f(x^*) \text{ và } \langle p, x \rangle \leqslant f(x), \forall x \in C$$

thì

$$\begin{aligned} \langle p, x - x^* \rangle &= \langle p, x \rangle - \langle p, x^* \rangle \\ &\leqslant f(x) - f(x^*), \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

Vậy $p \in \partial f(x^*)$. □