BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

VŨ ÁNH TUYẾT

PHÉP CHIẾU XUỐNG TẬP LỒI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 0112**

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN, 2012

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên. Tác giả xin bầy tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy GS.TSKH Lê Dũng Mưu (Viện Toán học), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và viết luận văn vừa qua.
Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong khoa Toán - Tin, Phòng Đào tạo khoa học và Quan hệ quốc tế, các bạn học viên lớp cao học Toán K4 trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.
Tác giả cũng xin bầy tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân đã luôn khuyến khích và động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn.
Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Thái nguyên, ngày 10 tháng 10 năm 2012.

Tác giả

Vũ Ánh Tuyết

Mục lục

Lời cảm ơn **2**

Một số ký hiệu và chữ viết tắt **4**

Mở đầu **5**

1 Một số kiến thức cơ bản **6**

1.1 Kiến thức cơ bản về không gian Hilbert 6

1.1.1 Không gian Hilbert thực 6

1.1.2 Khai triển trực giao và hệ trực chuẩn 8

1.1.3 Phiếm hàm tuyến tính và song tuyến tính 11

1.1.4 Toán tử đối xứng hoàn toàn liên tục 12

1.2 Kiến thức cơ bản về tập lồi 13

1.2.1 Các tính chất cơ bản về tập lồi 14

1.2.2 Các tính chất cơ bản về hàm lồi 17

2 Phép chiếu xuống tập lồi đóng **25**

2.1 Kiến thức cơ bản về phép chiếu xuống tập lồi 25

2.1.1 Phép chiếu xuống tập lồi 25

2.1.2 Tính chất 26

2.1.3 Hình chiếu của một điểm xuống một số tập quen thuộc 28

2.2 Một số ứng dụng của phép chiếu 31

2.2.1 Định lý tách tập lồi 31

2.2.2 Sự tồn tại dưới vi phân 34

2.2.3 Giải bài toán bất đẳng thức biến phân 39

Kết luận **48**

Tài liệu tham khảo **49**

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$:	không gian thực
$x := y$:	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$:	với mọi x
$\exists x$:	tồn tại x
$\|x\|$:	chuẩn của vectơ x
$\langle x, y\rangle = x^T y$:	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\overline{A}$:	bao đóng của A.
coA :	bao lồi của A.
$\overline{co}A$:	bao lồi đóng của A.
$coneA$:	bao nón lồi của A.
$\overline{cone}A$:	bao nón lồi đóng của A.
$aff(A)$:	bao affine của tập A.
$ri(A)$:	tập điểm trong tương đối của tập A.
$V(A)$:	tập các điểm cực biên (đỉnh) của A.
$re(A)$:	nón lùi xa của A.
$intA$:	tập hợp các điểm trong của A.
$domf$:	tập hữu dụng của f.
f^* :	hàm liên hợp của f.
$epif$:	trên đồ thị của f.
$\partial f(x)$:	dưới vi phân của f tại x.
$f'(x, d)$:	đạo hàm theo hướng d của f tại x.
$A \subset B$:	tập A là tập con thực sự của tập B.
$A \subseteq B$:	tập A là tập con của tập B.
$A \cup B$:	A hợp với B
$A \cap B$:	A giao với B
$A \times B$:	tích Đề - các của hai tập A và B
A^T :	ma trận chuyển vị của ma trận A
$x^k \to x$:	dãy x^k hội tụ mạnh đến x
$x^k \rightharpoonup x$:	dãy x^k hội tụ yếu đến x

Mở đầu

Giải tích lồi là bộ môn cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi và hàm lồi cùng những vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng,...

Một trong những vấn đề quan trọng của giải tích lồi đó là phép chiếu lên một tập lồi đóng. Đây là một công cụ sắc bén và khá đơn giản để chứng minh nhiều định lý quan trọng như định lý tách, định lý xấp xỉ tập lồi, định lý về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân,... Những cách chứng minh dựa vào phép chiếu thường mang tính chất kiến thiết, gợi mở đến nhiều vấn đề khác.

Trong luận văn này, tác giả tập trung vào việc trình bầy định nghĩa, tính chất cùng những ứng dụng quan trọng của phép chiếu. Luận văn bao gồm 2 chương.

Trong chương 1, trình bầy một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert, về tập lồi và hàm lồi. Chúng là những công cụ cơ bản nhất cho những nghiên cứu được trình bầy trong luận văn. Chương 2 là chương chính của luận văn. Trong chương này, tác giả trình bầy về khái niệm, tính chất cơ bản của phép chiếu. Trong quá trình nghiên cứu chúng ta biết rằng hình chiếu vuông góc của một điểm lên tập lồi đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert luôn tồn tại và duy nhất. Dựa vào đó, tác giả đề cập đến những ứng dụng của nó, cụ thể là chứng minh định lý tách, chứng minh sự tồn tại dưới vi phân của hàm lồi, giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này, ta sẽ trình bày những kiến thức cơ bản về không gian Hilbert, tập lồi và hàm lồi. Các kiến thức này được lấy từ các tài liệu [1,2,4,5].

1.1 Kiến thức cơ bản về không gian Hilbert

Trong phần này ta sẽ xét X là một không gian Hilbert thực. Sau đây ta nhắc lại một số kiến thức liên quan.

1.1.1 Không gian Hilbert thực

Định nghĩa 1.1. *Cho X là một không gian tuyến tính trên trường số thực $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ được kí hiệu*

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned}
&1)\ \langle x,x \rangle \geq 0 \forall x \in X;\\
&\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\
&2)\ \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \ \forall x,y \in X;\\
&3)\ \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \ \forall x_1, x_2, y \in X;\\
&4)\ \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle \ \forall x,y \in X, \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Khi đó, không gian tuyến tính $X \langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert.

Ví dụ 1.1. Không gian $C_{[a,b]}$ gồm tất cả các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$

với các phép toán thông thường và với tích vô hướng cho bởi:

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt$$

là một không gian tiền Hilbert.

Định nghĩa 1.2. *Không gian đầy đủ là không gian mà mọi dãy Cauchy đều hội tụ.*

Ví dụ 1.2. i) Không gian $C_{[a,b]}$ với chuẩn $\|x\|_1 = max\,|x(t)|$ là không gian đầy đủ.

ii) Không gian $C_{[a,b]}$ với chuẩn $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ không là không gian đầy đủ.

Định nghĩa 1.3. *Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.*

Ví dụ 1.3. i) Không gian $L^2_{[a,b]}$ với chuẩn $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ là một không gian Hilbert.

ii) Không gian l^2 với chuẩn $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right)^{1/2} < +\infty, x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ là một không gian Hilbert.

Nhận xét 1.1. i) Không gian tiền Hilbert là không gian định chuẩn với chuẩn $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.
ii) Không gian tiền Hilbert luôn có bất đẳng thức Schwars:

$$\|\langle x, y\rangle\| \le \|x\| . \|y\|$$

iii) Không gian tiền Hilbert luôn thỏa mãn điều kiện bình hành:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

iv) Tích vô hướng (x, y) là một hàm số liên tục đối với biến x và y.

1.1.2 Khai triển trực giao và hệ trực chuẩn

Định nghĩa 1.4. *i) Hai vectơ x và y của một không gian Hilbert X được gọi là trực giao với nhau nếu $\langle x, y\rangle = 0$ và được kí hiệu là $x\perp y$.*
ii) Phần tử x của không gian Hilbert X được gọi là trực giao với một tập M nếu x trực giao với tất cả các phần tử của M.
iii) Tập tất cả các vectơ trực giao với tập M làm thành một không gian con đóng của X. Kí hiệu: $M^{\perp} = \{x \in X \,|x\perp M\}$ và được gọi là phần bù trực giao của M.

Từ định nghĩa trên ta có thể suy ra một số tính chất đơn giản sau:

Tính chất 1.1. *Nếu $x\perp y$ thì $y\perp x$. Ta có $x\perp x$ khi và chỉ khi $x = 0$. Vectơ 0 trực giao với mọi vectơ x.*

Chứng minh. Thật vậy, $x\perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$. Suy ra: $\langle y, x\rangle = 0 \Leftrightarrow y\perp x$.
+) $x\perp x \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \forall x \in X$.
+) Ta có: $\langle 0, x\rangle = 0 \Leftrightarrow 0\perp x \forall x \in X$. □

Tính chất 1.2. *Nếu $x\perp y_1, x\perp y_2, ..., x\perp y_n$ thì x trực giao với một tổ hợp tuyến tính của y, tức là $x\perp(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n)\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Thật vậy, xét:

$$\begin{aligned}&\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n\rangle\\ &= (x, \alpha_1 y_1) + (x, \alpha_2 y_2) + ... (x, \alpha_n y_n)\\ &= \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2) + ... + \alpha_n (x, y_n) = 0\end{aligned}$$

Do đó, $x\perp(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n)\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$. □

Tính chất 1.3. *Nếu $x\perp y_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ thì $x\perp y$.*

Chứng minh. Ta có: $x\perp y_n \Leftrightarrow (x, y_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x, y_n) = 0$. Do X là không gian Hilbert nên tích vô hướng là một hàm liên tục hai biến. Do đó, $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (x, y_n) = 0$ nên $x\perp y$. □

Tính chất 1.4. *Nếu $x\perp y$ thì $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (định lý Pytago).*

Chứng minh. Thật vậy, do $x\perp y$ nên $(x, y) = 0$. Do đó,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2\,(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh tổng quát hơn, nếu các vectơ $x_1, x_2, ..., x_n$ đôi một trực giao với nhau và $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ thì $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. □

Tính chất 1.5. *Nếu $\{x_n\}$ là một hệ trực giao (nghĩa là các vectơ trực giao từng đôi một) thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ.*

Chứng minh. Thật vậy, cho $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, S_n{}' = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$
Với mọi $n > m$ đủ lớn, theo định lý Pytago ta có:

$$\|S_n - S_m\|^2 = \|x_{m+1} + ... + x_n\|^2 = \|x_{m+1}\|^2 + ... + \|x_n\|^2 = \left|S_n{}' - S_m{}'\right|$$

Vì không gian Hilbert là không gian đủ nên từ $\|S_n - S_m\| \to 0$ ta suy ra $\{S_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\left\{S_n{}'\right\}$ hội tụ. □

Định lý 1.1. *Cho M là một không gian con đóng của một không gian Hilbert X. Bất kỳ phần tử x nào của X cũng có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$x = y + z, y \in M, z \in M^{\perp} \tag{1.1}$$

trong đó y là phần tử của M gần x nhất tức là $\|x - y\| \le \|x - u\|$ với mọi $u \in M$.

Chứng minh. Có thể thấy ngay rằng phân tích (1.1) nếu có phải là duy nhất vì nếu $x = y + z = y' + z'$ với $y, y' \in M; z, z' \in M^{\perp}$ thì $y - y' = z' - z$ mà $M, M^{\perp}$ đều là không gian con nên $y - y' \in M; z' - z \in M^{\perp}$ tức là $(y' - y) \perp (z' - z)$, do đó $y - y' = z' - z = 0$. Thành thử vấn đề chủ yếu là sự tồn tại của phân tích (1.1).
Ta nhận xét rằng: Trong trường hợp riêng $X = \mathbb{R}^2$ và M là một đường thẳng thì định lý nói lên một sự kiện quen thuộc.
Trong trường hợp tổng quát ta đặt:

$$d = \inf_{u \in M} \|x - u\|$$

Theo định nghĩa cận dưới đúng, tồn tại một dãy $u_n \in M$ sao cho $\|x - u_n\| \to d (n \to \infty)$. Áp dụng đẳng thức bình hành cho $x - u_n$ và $x - u_m$ ta có: $\|2x - (u_n + u_m)\|^2 + \|u_m - u_n\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2$.
Khi $n, m \to \infty$ thì vế phải dần tới $4d^2$ còn phần đầu vế trái bằng $4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 \ge 4d^2$ vì $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in M$.

Vậy, khi $n, m \to \infty$ thì $\|u_n - u_m\| \to 0$, do đó u_n dần tới một giới hạn y nào đó. Ta có $y \in M$ vì M đóng và $\|x - y\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - u_n\| = d$.

Bây giờ ta đặt $z = x - y$ và tìm cách chứng minh $z \in M^\perp$. Muốn thế, xét một phần tử u bất kỳ của M. Ta có, với mọi số thực α:

$$(z - \alpha u, z - \alpha u) = \|z\|^2 - 2\alpha\,(z, \alpha) + \alpha^2\|u\|^2$$

Mà $y + \alpha u \in M$ nên $(z - \alpha u, z - \alpha u) = \|z - \alpha u\|^2 = -\|x - (y + \alpha u)\|^2 \geq d^2$. Mặt khác, $\|z\|^2 = \|x - y\|^2 = d^2$, do đó với mọi số thực α:

$$-2\alpha\,(z, \alpha) + \alpha^2\|u\|^2 \geq d^2 - d^2 = 0$$

Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $(z, u) = 0$ tức là $z \perp u$. Vậy, $z \in M^\perp$ (đpcm). Vectơ y trong phân tích (1.1) gọi là *hình chiếu* của x lên không gian con M. Đó là khoảng cách nhỏ nhất từ M tới x.
Đặt $Px = y$, ta xác đinh một toán tử P gọi là *toán tử chiếu* lên M:

$$P : X \underset{x \mapsto Px = y}{\to} M$$

Rõ ràng, P là một toán tử tuyến tính liên tục vì $\|Px\| \leq \|x\|$. □

Định nghĩa 1.5. *Một hệ $\{e_n\}$ các phần tử của không gian Hilbert X được gọi là hệ trực chuẩn nếu $(e_i, e_j) = \delta_{\mathrm{ij}}$ trong đó $\delta_{ij} = 1$ nếu $i = j$ và $\delta_{ij} = 0$ nếu i khác j.*

Như vậy một hệ trực chuẩn là một hệ trực giao và chuẩn hóa $\|e_i\| = 1 \forall i$. Khi $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn thì với mọi $x \in X$, số $\zeta_i = (x, e_i)$ được gọi là *hệ số Fourier* của x đối với e_i và chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i e_i$ được gọi là *chuỗi Fourier* của x theo hệ $\{e_n\}$. Ta có các tính chất sau:
i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} {\zeta_i}^2 \leq \|x\|^2$ (Bất đẳng thức Besel).
ii) Chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i e_i$ hội tụ và $(x - \sum\limits_{i=1}^{\infty} \zeta_i e_i) \perp e_n$.
Một hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ gọi là *đầy đủ* khi chỉ có vectơ 0 mới trực giao với tất cả các phần tử của hệ $x \perp e_n (n = 1, 2, ...)$. Suy ra $x = 0$.

Định lý 1.2. *Cho $\{e_n\}$ là một hệ trực chuẩn, $\zeta_n = (x, e_n)$ là các hệ số Fourier của x đối với e_n. Các mệnh đề sau là tương đương:*