ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM ANH KHOA

VỀ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN CÁC KHÔNG GIAN METRIC ĐẦY ĐỦ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Phản biện 1: **TS. Nguyễn Quỳnh Nga**

Phản biện 2: **TS.Vũ Mạnh Xuân**

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Ngày 18 tháng 11 năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Lời nói đầu

Bài toán nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất của điểm bất động của ánh xạ là một vấn đề thời sự, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới và đạt được nhiều kết quả quan trọng. Với một không gian X, $f : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ. Điểm $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 = f(x_0)$ được gọi là *điểm bất động* của ánh xạ f. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện nào của X và f thì f có điểm bất động và khi nào điểm bất động đó là duy nhất.

Những định lý về điểm bất động xuất hiện từ đầu thế kỷ XX. Các công trình đầu tiên là Nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912) và Nguyên lý ánh xạ co Banach (1922), trong đó Nguyên lý ánh xạ co Banach được đánh giá là định lý điểm bất động đơn giản và được sử dụng rộng rãi nhất. Về sau, các kết quả kinh điển này đã được mở rộng ra nhiều lớp ánh xạ và các không gian khác nhau và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Các kết quả nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ tập chung vào các hướng: nghiên cứu sự tồn tại, duy nhất của điểm bất động. Các phương pháp tìm điểm bất động và nghiên cứu ứng dụng của định lý điểm bất động. Các công trình theo hướng nghiên cứu này được biết đến với tên: "Lý thuyết điểm bất động" và ngày càng được phát triển mạnh mẽ.

Thời gian gần đây, các định lý điểm bất động còn được mở rộng cho một họ ánh xạ hợp thành giữa các không gian metric. Cho $M_1, ..., M_p$ là một họ các không gian metric, $A_j : M_j \to M_{j+1}, j = 1, \ldots, p-1$ và $A_p : M_p \to M_1$ là một họ các ánh xạ. Vấn đề đặt ra là với những điều kiện nào của các không gian M_j và ánh xạ A_j thì các ánh xạ hợp thành $A_{j-1}...A_{j+1}A_j : M_j \to M_j$ có điểm bất động. Năm 1985, N. P. Nung trong [8] đã chứng minh một điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất của ánh xạ hợp thành giữa ba không gian metric. Trong [6], các tác giả xem xét trường hợp $p = 3$ và tính chất liên tục của các ánh xạ được bỏ qua. L. Kikina và K. Kikina khảo sát với $p = 4$ trong [5], trong [3] các tác giả chứng minh định lý điểm bất động với $p = 5$, ... Trong luận văn này, chúng tôi trình bày tổng quan các kết quả nghiên cứu và chứng minh chi tiết kết quả L. Kikina trong [6], của M. Garg and S. Agarwal trong [3]. Ngoài ra chúng tôi chứng minh thêm một kết quả nghiên cứu về cải tiến kết quả của M. Garg and S. Agarwal.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Dành cho việc trình bày một số vấn đề cơ sở của không gian metric, không gian Banach, Nguyên lý ánh xạ co Banach và kết quả của L. Kikina trong [6] trong trường hợp $p = 3$.

Chương 2: Chúng tôi trình bày về các dạng định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa năm không gian metric đầy đủ.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Hà Trần Phương - Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Hà Trần Phương. Người Thầy đã dành rất nhiều thời gian quý báu, tâm huyết. Đã hướng dẫn, giúp đỡ, động viên tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn tới Ban Giám hiệu, các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Những thầy cô đã tận tình dạy bảo cho tác giả suốt thời gian học. Đã trang bị cho tác giả và lớp Cao học Toán K4c những kiến thức và tạo mọi điều kiện cho lớp học tập tại trường. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K4c - Trường Đại học Khoa học đã động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp trường THPT Kim Ngọc - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện về mọi mặt để tác giả được tham gia học tập và hoàn thành khóa học.

Tuy nhiên, do thời gian và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của quý Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 11 năm 2012

Tác giả

Phạm Anh Khoa

Chương 1

Mở đầu về điểm bất động của ánh xạ hợp thành

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số định lý cổ điển về định lý điểm bất động và chứng minh lại định lý điểm bất động của ánh xạ hợp thành giữa ba không gian metric đầy đủ của L. Kikina ([6]).

1.1 Ánh xạ Lipschitz và định lý điểm bất động

1.1.1 Một số khái niệm

Cho X là một tập khác rỗng, trên X ta trang bị hàm số

$$\begin{aligned} \rho :&X \times X \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto \rho(x, y) \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ &(2) \qquad \rho(x, y) = \rho(x, y); \\ &(3) \qquad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \end{aligned}$$

với mọi $x, y, z \in X$. Khi đó ρ được gọi là một *metric* hay *khoảng cách* trên X và cặp (X, ρ) gọi là *một không gian metric*. Mỗi phần tử của X sẽ được gọi là *một điểm*, $\rho(x, y)$ gọi là *khoảng cách giữa hai điểm* x, y trên X.

Cho X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, chuẩn trên X là hàm số

$$\begin{aligned} ||.|| : &X \to \mathbb{R}^+ \\ &x \mapsto ||x|| \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} &(1) \qquad ||x|| \geq 0, \qquad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \\ &(2) \qquad ||\lambda x|| = |\lambda|||x|; \\ &(3) \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in X$ và $\lambda \in \mathbb{K}$.

Cặp $(X, ||.||)$, trong đó X là một không gian tuyến tính, $||.||$ là một chuẩn trên X. Gọi là một *không gian định chuẩn* (hay còn gọi là *không gian tuyến tính định chuẩn*).

Với một không gian định chuẩn $(X, ||.||)$, ta dễ dàng chứng minh được hàm

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+,$$

xác định bởi $\rho(x, y) = ||x - y||$, với $x, y \in X$, là một metric trên X, $\rho = o$ gọi là metric sinh bởi chuẩn. Như vậy mỗi không gian định chuẩn đều là không gian metric.

Ví dụ 1.1. Dễ dàng chứng minh được $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ là không gian định chuẩn với chuẩn xác định bởi:

$$||x|| = |x| \quad \text{với } x \in X.$$

Do đó $\mathbb{K}$ là không gian metric với $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ví dụ 1.2. Cho $X = \mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, ..., x_n)$, đặt

$$||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

Khi đó $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x_1 = \cdots = x_n = 0$, tức là $x = 0$. $\|\lambda x\| = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + ... + |\lambda x_n|^2} = |\lambda|\|x\|$. Và với $x = (x_1, ..., x_n)$,

$y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (|x_1+y_1|)^2 + ... + (|x_n+y_n|)^2 \\ &= (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2) + (|y_1|^2 + ... + |y_n|^2) \\ &\quad + 2(|x_1y_1| + ... + |x_ny_n|) \\ &\le (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2) + (|y_1|^2 + ... + |y_n|^2) \\ &\quad + 2\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.\sqrt{|y_1|^2 + ... + |y_n|^2} \\ &= (\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} + \sqrt{|y_1|^2 + ... + |y_n|^2})^2. \end{aligned}$$

Từ đó $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Như vậy, $\|.\|$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Do đó

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

là một metric trên $\mathbb{R}^n$.

Cho (X, ρ) là một không gian metric, $x_0 \in X$ và $r > 0$. Tập

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

gọi là *hình cầu mở* tâm x_0 bán kính r. Tập

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}$$

gọi là *hình cầu đóng* tâm x_0 bán kính r. Giả sử A là một tập con của không gian metric của X, điểm $x_0 \in A$ được gọi là *điểm trong* của A nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x_0, r) \subset A$. Tập tất cả các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và kí hiệu int$A$ hoặc A^o. Một tập con A trong không gian metric (X, ρ) được gọi là đóng nếu phần bù của nó $C_X A$ là tập mở.

Nhận xét. *Trong không gian metric (X, ρ), X, $\emptyset$ là các tập mở. Hình cầu $B(x_0, r)$ là một tập mở vì với mọi $x \in B(x_0, r)$ luôn tồn tại $r_1 = r - \rho(x_0, r) > 0$ sao cho $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$, tức là mọi điểm của $B(x_0, r)$ đều là điểm trong. Hiển nhiên X và $\emptyset$ cũng là những tập đóng trong không gian metric. Ngoài ra mọi hình cầu đóng là một tập đóng.*

Cho (X, ρ) là một không gian metric, $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử của X, ta nói $\{x_n\}$ hội tụ đến $x_0 \in X$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ hoặc $x_n \to x_0$, x_0 gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

Không gian metric đầy đủ, không gian Banach

Giả sử (X, ρ) là một không gian metric. Dãy $\{x_n\}$ các phần tử của X được gọi là một dãy Cauchy (*hay còn gọi là dãy cơ bản*) nếu:

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$, với mọi $m, n \geq n_0 : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Trong trường hợp X là không gian siêu metric, điều kiện Cauchy của dãy $\{x_n\} \subset X$ là

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Ta biết rằng mọi dãy hội tụ trong không gian metric đều là những dãy Cauchy, tuy nhiên điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ 1.3. $\mathbb{Q}$ với metric $\rho(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{Q}$ là một không gian metric, dãy $\left\{x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{Q}$ nhưng không hội tụ trong $\mathbb{Q}$.

Không gian metric X được gọi là *không gian metric đầy đủ* nếu với mọi dãy Cauchy các phần tử của X đều hội tụ. Không gian định chuẩn đầy đủ với metric sinh bởi chuẩn được gọi là *không gian Banach*.

Ví dụ 1.4. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ với metric tự nhiên, là các không gian metric đầy đủ (theo tiêu chuẩn Cauchy trong các không gian này). Đồng thời chúng cũng là các không gian Banach. $\mathbb{R}^n$ cũng là một không gian metric đầy đủ. Tuy nhiên $\mathbb{Q}$ không là không gian đầy đủ.