ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN NGỌC TÚ

KHUNG VÀ CƠ SỞ RIESZ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN NGỌC TÚ

KHUNG VÀ CƠ SỞ RIESZ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : **60.46.01.12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. NGUYỄN QUỲNH NGA

Thái Nguyên - Năm 2012

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên của luận văn tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Quỳnh Nga đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 09 năm 2012.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Tú

Mục lục

Mở đầu

Cơ sở đóng vai trò thiết yếu trong nghiên cứu các không gian vector cả trong trường hợp hữu hạn chiều cũng như vô hạn chiều. Ý tưởng là giống nhau trong cả hai trường hợp, cụ thể là một họ các phần tử sao cho mọi vector trong không gian được xét có thể biểu diễn một cách duy nhất như một tổ hợp tuyến tính của các phần tử này. Trong không gian vô hạn chiều, tình huống sẽ trở nên phức tạp hơn: chúng ta buộc phải làm việc với chuỗi vô hạn. Có một số khái niệm cơ sở khác nhau trong không gian Hilbert như cơ sở trực chuẩn, cơ sở Schauder, cơ sở Riesz. Tuy nhiên cơ sở có một số hạn chế trong đó hạn chế chính là thiếu đi tính linh hoạt. Trong một số trường hợp các điều kiện để trở thành cơ sở quá mạnh đến mức dường như ta không thể xây dựng được các cơ sở với những tính chất đặc biệt và một sự thay đổi nhỏ trên cơ sở cũng làm cho nó không còn là cơ sở nữa. Một hạn chế khác của cơ sở là thiếu đi tính ổn định đối với các tác động của các toán tử. Những hạn chế vừa đưa ra là một số lý do khiến chúng ta nghiên cứu khái niệm khung mà trong nhiều trường hợp ở đó cơ sở tồn tại nhưng khung vẫn được sử dụng hữu hiệu hơn.

Khái niệm khung được đưa ra năm 1952 bởi Duffin và Schaeffer khi họ nghiên cứu chuỗi Fourier không điều hòa, tức là chuỗi thiết lập từ $\left\{e^{i\lambda_n x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ trong đó $\lambda_n \in \mathbb{R}$ hoặc $\lambda_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Tuy nhiên phải đến năm 1986 sau bài báo của Daubechies, Grossmann và Meyer thì khung mới được quan tâm rộng rãi. Khung được sử dụng nhiều trong xử lý tín hiệu, lý thuyết mật mã, lý thuyết lượng tử...

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày hệ thống các khái niệm cơ sở cùng các tính chất.

Chương 2: Trình bày tổng quan về lý thuyết khung trong không gian Hilbert.

Chương 3: Trình bày một số mối liên hệ giữa khung và cơ sở Riesz.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 09 năm 2012.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Tú

Chương 1

Cơ sở

1.1 Một số khái niệm và kết quả chuẩn bị

Trong mục này chúng tôi nhắc lại một vài khái niệm và kết quả sẽ cần đến trong những phần tiếp theo. Các kết quả có thể tham khảo trong [1].

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert, toán tử bị chặn $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gọi là toán tử unita nếu $UU^* = U^*U = I$. Khi đó $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$.*

Định nghĩa 1.1.2 *Cho 1 họ các không gian Hilbert $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$, tổng trực tiếp của chúng được ký hiệu bởi :*

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n \right)_{l^2} \tag{1.1}$$

bao gồm tất cả các dãy $g = (g_1, g_2, ...)$, với $g_n \in \mathcal{H}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 < \infty$.

$\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert tương ứng với tích $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathcal{H}_n}$, $f, g \in \mathcal{H}$, với chuẩn $\|g\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2$.

Bổ đề 1.1.3 *Giả sử μ là độ đo dương trên σ- đại số $\mathcal{M}$. Giả thiết* *rằng* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ *và* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ...$

Nếu $\mu(A_1) < \infty$ *thì* $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Định lý 1.1.4 *Giả sử* $U_n : X \to Y, n \in \mathbb{N}$ *là một dãy của các toán tử bị chặn,* U_n *hội tụ từng điểm đến ánh xạ* $U : X \to Y$. *Khi đó* U *là tuyến tính, bị chặn. Ngoài ra, dãy của các chuẩn* $\|U_n\|$ *bị chặn và* $\|U\| \le \liminf \|U_n\|$.

Toán tử $U : X \to Y$ là khả nghịch nếu U là toàn ánh và đơn ánh.

Định lý 1.1.5 *Một toán tử song ánh, bị chặn giữa các không gian Banach có nghịch đảo bị chặn.*

Định lý 1.1.6 *Nếu* $U : X \to X$ *bị chặn và* $\|I - U\| < 1$ *thì* U *là khả nghịch và* $U^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (I-U)^k$. *Ngoài ra,* $\left\|U^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|I-U\|}$.

Bổ đề 1.1.7 *Cho* $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ *là các không gian Hilbert. Giả sử* $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ *là toán tử bị chặn. Khi đó có khẳng định sau:*

(i) $\|U\| = \|U^*\|$ *và* $\|UU^*\| = \|U\|^2$.

(ii) $\mathcal{R}_U$ *đóng trong* $\mathcal{H}$ *khi và chỉ khi* $\mathcal{R}_{U^*}$ *đóng trong* $\mathcal{K}$.

(iii) U *là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại 1 hằng số* $C > 0$ *sao cho* $\|U^*y\| \ge C\|y\|, \forall y \in \mathcal{H}$.

Định lý 1.1.8 *Giả sử* $\mathcal{H}$ *là không gian Hilbert và* $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *là ánh xạ tuyến tính liên tục. Khi đó tồn tại duy nhất một* $y \in \mathcal{H}$ *sao cho* $f(x) = \langle x, y\rangle$.

Định lý 1.1.9 *Giả sử* U_1, U_2, U_3 *là các toán tử tự liên hợp.*

Nếu $U_1 \le U_2, U_3 \ge 0$ *và* U_3 *giao hoán với* U_1, U_2 *thì* $U_1U_3 \le U_2U_3$.

Bổ đề 1.1.10 *Giả sử* $\mathcal{H}$ *là không gian Hilbert. Mọi toán tử dương, bị chặn* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *có duy nhất căn bậc hai dương bị chặn* W. *Nếu* U *là tự liên hợp thì* W *là tự liên hợp. Nếu* U *là khả nghịch thì* W *cũng là* *khả nghịch. W có thể biểu thị như một giới hạn của dãy các đa thức của U và giao hoán với U.*

Bổ đề 1.1.11 *Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert. Khi đó :*

(i) Mọi toán tử bị chặn, khả nghịch $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ có 1 biểu diễn duy nhất $U = \mathrm{W}P$ mà U là toán tử unita, P dương.

(ii) Giả thiết rằng $\mathcal{H}$ là phức. Khi đó mọi toán tử dương P trên $\mathcal{H}$ với $\|P\| \leq 1$ có thể viết là trung bình các toán tử unita, tức là $P = \frac{1}{2}(\mathrm{W} + \mathrm{W}^*)\,; \mathrm{W} = P + i\sqrt{I - P^2}$.

Bổ đề 1.1.12 *Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert, giả thiết rằng $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn với miền giá trị đóng $\mathcal{R}_U$. Khi đó tồn tại 1 toán tử bị chặn $U^\dagger : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ mà $UU^\dagger f = f, \forall f \in \mathcal{R}_U$.*

Toán tử $U^\dagger$ được gọi là giả nghịch đảo của U. Ta cũng thường thấy giả nghịch đảo của một toán tử U với miền giá trị đóng được định nghĩa như toán tử duy nhất thỏa mãn :

$$\mathcal{N}_{U^\dagger} = \mathcal{R}_U^\perp, \mathcal{R}_{U^\dagger} = \mathcal{N}_U^\perp \text{ và } UU^\dagger f = f, f \in \mathcal{R}_U. \tag{1.2}$$

Bổ đề 1.1.13 *Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert và $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ là toán tử bị chặn với miền giá trị đóng. Khi đó:*

(i) Hình chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên $\mathcal{R}_U$ được cho bởi $UU^\dagger$.

(ii) Hình chiếu trực giao của $\mathcal{H}$ lên $\mathcal{R}_{U^\dagger}$ được cho bởi $U^\dagger U$.

(iii) U^* có miền giá trị đóng và $(U^*)^\dagger = \left(U^\dagger\right)^*$.

(iv) Trên $\mathcal{R}_U$, toán tử $U^\dagger$ được cho bởi $U^\dagger = U^*(UU^*)^{-1}$.

Định lý 1.1.14 *Giả sử $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ là các không gian Hilbert và $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ là một toán tử toàn ánh, bị chặn. Cho $y \in \mathcal{H}$, phương trình $Ux = y$ có duy nhất một nghiệm có chuẩn nhỏ nhất là $x = U^\dagger y$.*