ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ LOẠI ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2012

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TR□ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

HỆ PH□ƠNG TRÌNH TOÁN TỬ LOẠI ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng Dụng
Mã số: 60.46.0112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ng□ời h□ớng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN – 2012

Mục lục

Mục lục 1
Mở đầu 5

1 Hệ phương trình với toán tử ngược đơn điệu mạnh **6**
1.1. Toán tử đơn điệu 6
1.1.1. Không gian Banach 6
1.1.2. Toán tử đơn điệu, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc . . 9
1.1.3. Ánh xạ đơn điệu cực đại 11
1.2. Hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh 13
1.2.1. Sự hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh 13
1.2.2. Tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh 19

2 Hệ phương trình với toán tử accretive **22**
2.1. Toán tử accretive 22
2.1.1. Toán tử accretive 22
2.1.2. Một số bổ đề bổ trợ 24
2.2. Hệ phương trình toán tử accretive 26
2.2.1. Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov 26
2.2.2. Thuật toán điểm gần kề quán tính 29
2.2.3. Tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov 33
Kết luận 39

Mở đầu

Cho E là một không gian Banach thực phản xạ, E^* là không gian liên hợp của E, cả hai có chuẩn đều được kí hiệu là $\|.\|$, $A : E \to E^*$ là toán tử đơn điệu đơn trị. Với $f \in E^*$, tìm $x_0 \in E$ sao cho

$$A(x_0) = f. \tag{0.1}$$

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán (0.1) là việc xây dựng các phương pháp giải. Bài toán (0.1), khi toán tử A không có tính chất đơn điệu đều hoặc đơn điệu mạnh, nói chung là bài toán đặt không chỉnh (*ill-posed*) theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu ban đầu.

Năm 1963 A.N. Tikhonov [7] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử (0.1) trong không gian Hilbert thực H dựa trên việc tìm phần tử cực tiểu $x_\alpha^{h,\delta}$ của phiếm hàm Tikhonov

$$F_\alpha^{h,\delta}(x) = \|A_h(x) - f_\delta\|^2 + \alpha\|x_* - x\|^2 \tag{0.2}$$

trong đó $\alpha > 0$ là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc vào h và δ, x_* là phần tử cho trước đóng vai trò là tiêu chuẩn chọn và (A_h, f_δ) là xấp xỉ của (A, f). Hai vấn đề cần được giải quyết ở đây là tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov và chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(h, \delta)$ thích hợp để phần tử cực tiểu $x^{h,\delta}_{\alpha(h,\delta)}$ dần tới nghiệm chính xác của bài toán (0.1) khi h và δ dần tới không.

Việc tìm phần tử cực tiểu của phiếm hàm Tikhonov sẽ gặp nhiều khó khăn trong trường hợp bài toán phi tuyến. Đối với bài toán phi tuyến với toán tử đơn điệu $A : E \to E^*$, F. Browder [5] đưa ra một dạng khác của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Tư tưởng chủ yếu của phương pháp do F. Browder đề xuất là sử dụng một toán tử $M : E \to E^*$ có tính chất *hemi*-liên tục, đơn điệu mạnh làm thành phần hiệu chỉnh. J^s, ánh xạ đối ngẫu tổng quát của E, là một toán tử có tính chất như vậy. Bằng phương pháp này Ya.I. Alber [2] nghiên cứu phương trình hiệu chỉnh

$$A_h(x) + \alpha J^s(x - x_*) = f_\delta \tag{0.3}$$

cho bài toán (0.1).

Một mở rộng của bài toán (0.1) là bài toán tìm nghiệm chung cho hệ phương trình toán tử

$$A_j(x) = f_j \ \forall j = 1, ..., N, \tag{0.4}$$

ở đây $A_j : E \to E^*$, là các toán tử loại đơn điệu, đơn trị và $f_j \in E^*$.

Dựa trên việc sử dụng phương trình (0.3) để hiệu chỉnh cho mỗi phương trình trong (0.4), năm 2006 Nguyễn Bường [4] đã kết hợp các phương trình dạng này để hiệu chỉnh cho hệ phương trình toán tử (0.4) trên cơ sở xây dựng một phương trình phụ thuộc tham số

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha^{\mu_j} A_j^h(x) + \alpha J^s(x - x_*) = \theta, \tag{0.5}$$

$$\mu_1 = 0 < \mu_j < \mu_{j+1} < 1, j = 2, ..., N-1,$$

trong trường hợp $f_j = \theta$, ở đây A_j^h là xấp xỉ của A_j.

Mục đích của luận văn nhằm trình bày lại các kết quả về phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và thuật toán điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử (0.4) với toán tử đơn điệu và toán tử accretive trên cơ sở các nghiên cứu của Nguyễn Bường, Nguyễn Thị Thu Thủy và Trương Minh Tuyên trong các tài liệu [4], [6], [8] và [9].

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày sự hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiệu chỉnh hệ phương trình với toán tử đơn điệu đồng thời trình bày định lý về tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh với tham số hiệu chỉnh được chọn tiên nghiệm.

Trong chương 2 sẽ trình bày phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và thuật toán điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh hệ phương trình với toán tử accretive, đồng thời trình bày sự ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov trong trường hợp này.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, trưởng khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, người đã hướng dẫn, chỉ dạy tận tình để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô công tác tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã truyền thụ kiến thức cho tôi trong suốt quá trình học tập vừa qua.

Tôi cũng xin cảm ơn cơ quan, bạn bè, gia đình đã chia sẻ, giúp đỡ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 10 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Vân

Chương 1

Hệ phương trình với toán tử ngược đơn điệu mạnh

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả nghiên cứu trong [4] và [6] về sự hội tụ và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov hiệu chỉnh hệ phương trình toán tử ngược đơn điệu mạnh trong không gian Banach phản xạ thực.

1.1. Toán tử đơn điệu

Các khái niệm và kết quả trong mục này được tham khảo trong các tài liệu [1], [3] và [10].

1.1.1. Không gian Banach

Cho E là một không gian Banach và E^* là không gian đối ngẫu của E, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên E. Sự hội tụ mạnh và hội tụ yếu của dãy $\{x_n\} \in E$ về phần tử x trong E lần lượt được kí hiệu là $x_n \to x$ và $x_n \rightharpoonup x$ tương ứng.

Không gian Banach E được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai E^{**} của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho $x^*(x) = x^{**}(x^*)$ với mọi $x^* \in E^*$. Sau đây là một tính chất của không gian phản xạ:

Mệnh đề 1.1.1. *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) E là không gian phản xạ;

ii) Mọi tập con lồi, đóng và bị chặn của E đều là tập compact yếu;

iii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Định nghĩa 1.1.1. Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ của E là lồi chặt, tức là từ $x, y \in S$ kéo theo $\|x + y\| < 2$ (nói cách khác biên của S không chứa bất kì một đoạn thẳng nào).

Định nghĩa 1.1.2. Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta\left(\varepsilon\right).$$

Dễ thấy rằng nếu E là một không gian Banach lồi đều thì nó là không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 1.1.1. Xét $E = c_0$ (không gian các dãy số hội tụ về không) với chuẩn $\|.\|_\beta$ xác định bởi

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2} \right), x = (x_i) \in c_0.$$

Khi đó, $(X, \|.\|_\beta)$, $\beta > 0$ là một không gian lồi chặt nhưng không là không gian lồi đều.

Để đo tính lồi của không gian Banach E người ta đưa vào khái niệm mô đun lồi

$$\delta_E(\epsilon) = \inf\left\{1 - 2^{-1}\|x+y\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| = \epsilon\right\}.$$

Mô đun lồi của không gian Banach E là một hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0, 2]$. Không gian Banach E lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_E(2) = 1$. Không gian Banach E lồi đều khi và chỉ khi $\delta_E(\varepsilon) > 0$ với mọi $\varepsilon > 0$.

Mệnh đề 1.1.2. *Mọi không gian Banach lồi đều đều là không gian phản xạ.*

Mô đun trơn của không gian Banach E là một hàm số xác định bởi

$$\rho_E(\tau) = \sup\left\{2^{-1}(\|x+y\| + \|x-y\|) - 1 : \|x\| = 1,\ \|y\| = \tau\right\}.$$

Mô đun trơn của không gian Banach E là một hàm số xác định, liên tục và tăng trên khoảng $[0, +\infty)$.

Định nghĩa 1.1.3. Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Ví dụ 1.1.2. Mọi không gian Hilbert và không gian $l^p\,(1 < p < +\infty)$ đều là không gian Banach lồi đều và trơn đều.

Định lý 1.1.1. *Cho E là một không gian Banach. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

$i)$ Nếu E là không gian trơn đều thì E^* là không gian lồi đều;

$ii)$ Nếu E là không gian lồi đều thì E^* là không gian trơn đều.