ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Nguyễn Văn Chiến

GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN HÌNH HỌC NHỜ SỐ PHỨC

Chuyên ngành: Toán Sơ Cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên, năm 2012

Mục lục

Mở đầu

1.Lí do chọn đề tài

Với các bài toán hình học sơ cấp thì việc tìm nhiều phương pháp giải đem lại cho người học nhiều hứng thú và ham thích học môn toán hơn. Đặc biệt là đối với các giáo viên, các em học sinh đang trực tiếp giảng dạy và học tập trong các cấp học phổ thông. Bản thân là một giáo viên đang giảng dạy ở trường THPT, nên đề tài rất có ý nghĩa trong thực tiễn. Vì vậy tôi đã lựa chọn đề tài này. Có nhiều cách tiếp cận và nghiên cứu về đa giác như phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ, ... Tuy vậy, trong đề tài này tác giả chỉ xin được trình bày một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu và giải quyết một số bài toán về hình học sơ cấp. Cũng chính vì thế nội dung trong đề tài này gồm các kiến thức về số phức, một số kiến thức về hình học và một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu một số bài toán về hình học sơ cấp.

2. Mục đích nghiên cứu

Hệ thống và tổng quát các bài toán về đa giác bằng phương pháp số phức và các ứng dụng khác nhau trong trường phổ thông. Đồng thời nắm được một số kĩ thuật tính toán biến đổi hình học liên quan đến số phức.

3. Nhiệm vụ của đề tài

Đưa ra định nghĩa và các phép toán về số phức một cách tổng quát có ví dụ minh họa kèm theo, ngoài ra đề tài đi sâu mở rộng các mảng kiến thức về số phức áp dụng trong hình học, đặc biệt các bài toán về đa giác.

Bên cạnh đó, qua việc nghiên cứu đề tài trang bị cho bản thân thêm một số nguồn tư liệu trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các bài toán hình học và dùng số phức vào giải các bài toán hình học sơ cấp, xét các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS – TSKH Hà Huy Khoái, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ,. . .

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh Trung học phổ thông. Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo trong việc dạy và học toán.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương

Chương I: Định nghĩa số phức

Chương II: Số phức và hình học

Chương III: Hình học giải tích trong số phức

Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TSKH Hà Huy Khoái, người đã tận tình giúp đỡ, động viên và ân cần chỉ bảo cho em hoàn thành luận văn này. Đồng thời em xin chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trong hội đồng khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo, cô giáo trực tiếp giảng dạy lớp Cao học toán K4C trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện tốt nhất, đã nhiệt tình giảng dạy và định hướng cho em trong quá trình học tập và nghiên cứu. Tuy đã hết sức cố gắng nghiên cứu đề tài và viết luận văn, song khó tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy, các cô và sự đóng góp ý kiến của các bạn bè đồng nghiệp để luận văn của em được hoàn chỉnh và có ý nghĩa thiết thực hơn.

Trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, năm 2012

Tác giả

Chương 1

Định nghĩa số phức

1.1 Sự biểu diễn đại số của số phức

1.1.1 Định nghĩa số phức

Giả thiết ta đã biết định nghĩa và các tính chất cơ sở của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Ta xét tập hợp $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}.\mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$. Hai phần tử (x_1, y_1) và (x_2, y_2), bằng nhau khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$. Các phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$ như sau:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Và

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1) . (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Với mọi $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Phần tử $z_1 + z_2$ gọi là tổng của z_1, z_2 và phần tử $z_1.z_2 \in \mathbb{R}^2$ gọi là tích của z_1, z_2.
Nhận xét:
1)Nếu $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1z_2 = (x_1x_2, 0)$.
2)Nếu $z_1 = (0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (0, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1z_2 = (-y_1y_2, 0)$.
Định nghĩa: Tập hợp $\mathbb{R}^2$ cùng với các phép toán cộng và nhân,được gọi là tập số phức, kí hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi phần tử $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức.
Kí hiệu $\mathbb{C}^*$ để chỉ tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

1.1.2 Các tính chất liên quan đến phép cộng số phức

(a) Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(b) Tính kết hợp: $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
(c) Phần tử đơn vị: Có duy nhất một số phức 0=(0,0) để
$z + 0 = 0 + z = z$ với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.
(d) Phần tử đối: Mỗi số phức z = (x,y) có duy nhất số phức
–z = (-x,-y) sao cho $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

1.1.3 Các tính chất liên quan đến phép nhân

Phép nhân các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây

Tính giao hoán: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Tính kết hợp: $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
Phần tử đơn vị: Có duy nhất số phức $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn
$z.1 = 1.z = z$. Số phức $1 = (1, 0)$ gọi là phần tử đơn vị với mọi $z \in \mathbb{C}$.
Phần tử nghịch đảo: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ có duy nhất số phức $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$ sao cho $z.z^{-1} = z^{-1}z = 1$ số phức $z^{-1} = (x', y')$ gọi là phần tử nghịch đảo của số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Lũy thừa với số mũ nguyên của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ được định nghĩa như sau
$z^0 = 1$; $z^1 = z$; $z^2 = z.z$, và $z^n = \underbrace{z.z...z}_{n\,\text{lần}}$ với mọi số nguyên $n > 0$
và $z^n = (z^{-1})^{-n}$ với mọi số nguyên $n < 0$.
Mọi số phức $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ và mọi số nguyên m,n ta có các tính chất sau
1)$z^m.z^n = z^{m+n}$;
2)$\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$;
3) $(z^m)^n = z^{mn}$;
4)$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$;
5) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$.
Khi $z = 0$ ta định nghĩa $0^n = 0$ với mọi số nguyên $n > 0$.
Tính phân phối: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$.
Trên đây là những tính chất của phép cộng và phép nhân,thấy rằng tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức cùng với các phép toán trên lập thành một trường.

1.2 Dạng đại số của số phức

Mỗi số phức được biểu diễn như một cặp số sắp thứ tự, nên khi thực hiện các biến đổi đại số thường không được thuận lợi. Đó là lí do để tìm dạng khác khi viết.

Ta sẽ đưa vào dạng biểu diễn đại số mới. Xét tập hợp $\mathbb{R} \times \{0\}$ cùng với phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$.
Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$, $f(x) = (x, 0)$ là một song ánh và ngoài ra $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ và $(x, 0).(y, 0) = (xy, 0)$.
Người đọc sẽ không sai lầm nếu chú ý rằng các phép toán đại số trên $\mathbb{R} \times \{0\}$ đồng nhất với các phép toán trên $\mathbb{R}$; vì thế chúng ta có thể đồng nhất cặp số $(x, 0)$ với số x, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta sử dụng song ánh trên và kí hiệu $(x, 0) = x$.
Xét $i = (0, 1)$ ta có

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0).(0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1).(y, 0). \end{aligned}$$

Từ trên ta có mệnh đề.

Mệnh đề 1.2.1. *Mỗi số phức $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $z = x + yi$. Với x, y là các số thực và $i^2 = -1$.*

Hệ thức $i^2 = -1$ được suy ra từ định nghĩa phép nhân
$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Biểu thức $x + yi$ được gọi là biểu diễn đại số của số phức $z = (x, y)$. Vì thế ta có thể viết $\mathbb{C} = \left\{x + yi \,|x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\,,\ i^2 = -1\right\}$. Từ giờ ta kí hiệu $z = (x, y)$ bởi $z = x + yi$. Số thực $x = \mathrm{Re}(z)$ được gọi là phần thực của số phức z, $y = \mathrm{Im}(z)$ được gọi là phần ảo của z. Số phức có dạng yi , $y \in \mathbb{R}$ gọi là số **ảo**. Số phức có dạng yi , $y \in \mathbb{R}^*$ gọi là số **thuần ảo**, số phức i gọi là **đơn vị ảo.**
Từ các hệ thức trên ta dễ dàng có các kết quả sau
a) $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ và $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.
b) $z \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Im}(z) = 0$.

c) $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.
Sử dụng dạng đại số, các phép toán về số phức được thực hiện như sau:
Phép cộng

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Dễ thấy tổng hai số phức là một số phức có phần thực là tổng các phần thực, có phần ảo là tổng các phần thực ảo.

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2).$$
$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).$$

Phép trừ

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\mathrm{Re}(z_1 - z_2) = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2).$$
$$\mathrm{Im}(z_1 - z_2) = \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2).$$

Phép nhân

$$z_1.z_2 = (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2).$$
$$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\,\mathrm{Re}(z_1).$$

Mỗi số thực λ, số phức $z = x + yi$, $\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda y i \in \mathbb{C}$ là tích của một số thực với một số phức. Ta có các tính chất sau

1) $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$.
2) $\lambda_1(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \lambda_2)z$.
3)$(\lambda_1 + \lambda_2)z = \lambda_1 z + \lambda_2 z$.

Lũy thừa của số i

Các công thức cho số phức với lũy thừa là số nguyên được bảo toàn đối với dạng đại số $z = x + yi$. Xét $z = i$, ta thu được:

$$i^0 = 1\,; \quad i^1 = i\,; \quad i^2 = -1\ ; \quad i^3 = i^2.i = -i$$

$$i^4 = i^3.i = 1; \quad i^5 = i^4.i = i\,; \quad i^6 = i^5.i = -1; \; i^7 = i^6.i = -i$$

Ta có thể tổng quát các công thức trên đối với số mũ nguyên dương n.

$$i^{4n} = 1\ ; \qquad i^{4n+1} = i\ ; \qquad i^{4n+2} = -1\ ; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Vì thế $i^n \in \{-1\ ,\ 1\ , -i\ ,\ i\}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Nếu n là số nguyên âm ta có:

$$i^n = \left(i^{-1}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}$$

Số phức liên hợp
Mỗi số phức $z = x + yi$ đều có số phức $\overline{z} = x - yi$, số phức đó được gọi là số phức liên hợp hoặc số phức liên hợp của số phức z.

Mệnh đề 1.2.2.

1) Hệ thức $z = \overline{z}$ đúng khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$;
2) Mỗi số phức z ta luôn có đẳng thức $z = \overline{\overline{z}}$;
3) Mỗi số phức z ta luôn có $z.\overline{z}$ là một số thực không âm;
4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (số phức liên hợp của một tổng bằng tổng các số phức liên hợp);
5) $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$(số phức liên hợp của một tích bằng tích các số phức liên hợp);
6) Mỗi số phức z khác 0 đẳng thức sau luôn đúng $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$;
7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ ,\quad z_2 \neq 0$ (liên hợp của một thương bằng thương các liên hợp);