ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ VĂN HẢI

BÀI TOÁN CHẤP NHẬN PHÂN RÃ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 0112

Người hướng dẫn khoa học:
GIÁO SƯ - TIẾN SỸ : NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN, năm - 2012

Mục lục

Lời nói đầu **3**

1 Một số khái niệm cơ bản **6**

1.1 Tập lồi - Hàm lồi 6

1.2 Không gian Hilbert 13

1.3 Một số ánh xạ cơ bản 23

2 Thuật toán CQ và thuật toán CQ nới lỏng **27**

2.1 Thuật toán CQ 27

2.2 Thuật toán CQ nới lỏng 31

Lời nói đầu

Cho N, M là 2 số nguyên dương và tập C, Q là hai tập lồi khác rỗng của không gian Ơcơlit R^N và R^M. Bài toán chấp nhận phân rã được giới thiệu trong [3] là bài toán tìm một điểm x^* thỏa mãn tính chất:

$$x^* \in C, Ax^* \in Q, \tag{0.1}$$

trong đó A là ma trận thực $M \times N$. Một trường hợp đặc biệt của (0.1) là bài toán tuyến tính có ràng buộc.

$$Ax = b, x \in C.$$

Bài toán đã được nghiên cứu rộng rãi trong các tài liệu của Landweber giới thiệu về phương pháp lặp và gọi là phương pháp chiếu lặp Landweber được đề xuất năm 1951.

Bài toán chấp nhận phân rã đã được Elfving và Censor [3] ứng dụng trong việc tìm ra phương pháp để phục hồi ảnh, tìm ra phương pháp giải các bài toán và đã thu được những thành công. Để giải bài toán chấp nhận phân rã Byrne [1] giới thiệu thuật toán lặp CQ với việc xác định một dãy lặp theo công thức:

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \gamma A^T\left(I - P_Q\right)Ax_n\right), \qquad n = 0, 1, ...,$$

ở đây A^T là ma trận chuyển vị của A, $x_o \in C$ là giá trị ban đầu và $\gamma > 0$ là tham số được chọn một cách thích hợp. Nhưng cách giải của thuật toán CQ là phức tạp và không thông dụng khi đó đòi hỏi những cách giải đơn giản hơn thông dụng hơn.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày một số kết quả và chứng minh đơn giản về thuật toán CQ đồng thời và thuật toán CQ nới lỏng để đưa thuật toán trở nên thông dụng hơn.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Giới thiệu một số kiến cơ bản về các tập hợp, các khái niệm về không gian Hilbert, các tính chất của không gian Hilbert và các ví dụ của không gian Hilbert, giới thiệu về hàm lồi và dưới vi phân.

Chương 2. Trình bày thuật toán CQ, thuật toán CQ nới lỏng.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Giáo sư - Tiến sỹ Nguyễn Bường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và chân thành của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ của các giáo sư công tác tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên -Đại học Quốc gia Hà nội, Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin -Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập ở trường.

Cuối cùng, tôi xin cám ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên

tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để tôi có điều kiện tốt nhất khi học tập nghiên cứu.

Do điều kiện thời gian và trình độ còn hạn chế, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi hy vọng được tiếp tục nghiên cứu đề tài trên trong thời gian tới.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, năm 2012
Tác giả

Lê văn Hải

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

1.1 Tập lồi - Hàm lồi

Định nghĩa 1.1. *Tập hợp $C \subset H$ (H là không gian Hilbert) gọi là lồi nếu:*
$x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C$. *Tức là hễ C chứa 2 điểm nào đó thì nó chứa cả đoạn thẳng nối 2 điểm ấy.*
Ví dụ. Toàn không gian H, hình vuông hình tròn, các nửa không gian đóng $\{x : \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$ $\{x : \langle a, x\rangle \geq \alpha\}$, hay các nửa không gian mở $\{x : \langle a, x\rangle < \alpha\}$, $\{x : \langle a, x\rangle > \alpha\}$
trong đó $\alpha \neq 0, \alpha \in H$ đều là những tập lồi.

Định nghĩa 1.2. *Điểm $x \in H$ có dạng $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a^i$ với $a^i \in H, \lambda_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ được gọi là một tổ hợp lồi của $a^1, a^2, ..., a^k \in H$.*

Mệnh đề 1.1. *Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là lồi. Nếu C, D là các tập lồi thì $C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\}$, $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ (do đó cả C-D =C+(-1) D) là các tập lồi.*
Chứng minh. Nếu $\{C_\alpha\}$ là một họ tập lồi và $a, b \in \bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha$ thì với mỗi α ta có $a \in C_\alpha, b \in C_\alpha$, vì thế $[a, b] \subset C_\alpha$ và do đó $[a, b] \subset \bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha$.

Nếu C, D là các tập lồi và $a = x + y, b = u + v$ với $x, u \in C, y, v \in D$ thì $(1 - \lambda)\, a + \lambda b = [(1 - \lambda)\, x + \lambda u] + [(1 - \lambda)\, y + \lambda v] \in C + D$ với mọi $\lambda \in [0, 1]$ do đó C+D là lồi. Tính lồi của λC chứng minh tương tự.

Định nghĩa 1.3. *Tập con M của H được gọi là một nón (mũi tại gốc) nếu $x \in M, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in M$. Nón M gọi là nón lồi nếu tập M là tập lồi.*

Định nghĩa 1.4. *Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là bao lồi của E và kí hiệu là conv$E$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E.*

Định nghĩa 1.5. *Điểm a gọi là điểm trong của C nếu tồn tại một hình cầu tâm a*
$\{x \in H : \|x - a\| \le r\}, \{x \in H : \|x - a\| < r\}$ *nằm hoàn toàn trong C.*

Hệ quả 1.1. *Điểm a của tập lồi $C \subset H$ là điểm trong của C khi và chỉ khi với mỗi $x \in H$ tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho $a + \alpha(x - a) \in C$.*

Định nghĩa 1.6. *Tập C là compac nếu mọi dãy vô hạn $\{x^k\} \subset C$ đều chứa 1 dãy con $\{x^{k_n}\}$ hội tụ tới 1 phần tử của C.*
Tập $C \subset H$ là compac $\Leftrightarrow$ C đóng và giới nội.

Định nghĩa 1.7. *Hàm $f : S \to H$ xác định trên tập lồi thuộc Hđược gọi là lồi trên S nếu với $\forall x, y \in S$, $\forall \lambda \in [0; 1]$ ta có:*

$$f[\lambda x + (1 - \lambda) y] \le \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

Định nghĩa 1.8. *Hàm $f(x)$ xác định trên tập lồi $C \subset H$ được gọi là lồi mạnh, nếu tồn tại hằng số $\rho > 0$ đủ nhỏ (hằng số lồi mạnh) sao cho với mọi $x, y \in C$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có bất đẳng thức:*

$$f[\lambda x + (1 - \lambda) y] \le \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - \lambda(1 - \lambda)\rho\|x - y\|^2.$$

Mệnh đề 1.2. *a) Mọi tổ hợp tuyến tính dương của các hàm lồi là lồi và là hàm lồi chặt nếu ít nhất một trong các hàm đã cho là lồi chặt.*

b) Nếu $f(x), x \in H$, là hàm lồi thì $f(Ax + b)$ cũng là hàm lồi, trong đó A là ma trận vuông cấp n và $b \in H$.

c) Cận trên của một họ tùy ý các hàm lồi là hàm lồi.

Mệnh đề 1.3. *Cho D là một tập lồi trong H, G là một tập lồi trong H và $\varphi(x, y)$ là một hàm lồi giá trị thực trên $D \times G$. Khi đó hàm:*

$$f(x) = \inf_{y \in G} \varphi(x, y).$$

là lồi trên D.

Chứng minh. Giả sử $x^1, x^2 \in D$ và $x = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2$ với $\lambda \in [0, 1]$ với mỗi i=1,2 lấy dãy $\left\{y^{i,k}\right\} \subset G$ sao cho:

$$\varphi\left(x^i, y^{i,k}\right) \to \inf_{y \in G} \varphi\left(x^i, y\right).$$

Do φ lồi nên

$$f(x) \leq \varphi\left(x, (1-\lambda)y^{1,k} + \lambda y^{2,k}\right) \leq (1-\lambda)\varphi\left(x^1, y^{1,k}\right) + \lambda\varphi\left(x^2, y^{2,k}\right).$$

Cho $k \to +\infty$ ta nhận được:

$$f(x) \leq (1-\lambda) f\left(x^1\right) + \lambda f\left(x^2\right).$$

Định nghĩa 1.9. *Hàm $f : H \to H$ gọi là Lipschitz địa phương tại $\bar{x} \in H$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ và K>0 sao cho:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K||x - y|| \quad (\forall x,\, y \in U) \tag{1.1}$$

hàm f được gọi là Lipschitz địa phương trên tập $C \in H$ nếu f Lipschitz địa phương tại mọi điểm $x \in C$ và f được gọi là Lipschitz với hằng số Lipschitz K trên tập $C \in H$ nếu (1.1) đúng với $\forall x, y \in C$.

Định nghĩa 1.10. *Cho hàm lồi chính thường f trên H, véc tơ $p \in H$ gọi là dưới grandient của f tại x^0 nếu:*

$$\left\langle p, x - x^0 \right\rangle + f\left(x^0\right) \leq f(x), \forall x \in H.$$

Tập tất cả các dưới grandient của f tại x^0 được gọi là dưới vi phân của f tại x^0.Kí hiệu là $\partial f\left(x^0\right)$.
Hàm f gọi là khả dưới vi phân tại x^0 nếu $\partial f\left(x^0\right) \neq \emptyset$.

Định lý 1.1. *Một hàm lồi chính thường f trên H có dưới vi phân khác rỗng tại mỗi điểm $x^0 \in \operatorname{int}(\operatorname{domf})$ và $\partial f\left(x^0\right)$ là một tập lồi đóng.*

Chứng minh. Do $x^0 \in \operatorname{int}(d\mathrm{omf})$ nên $\operatorname{int}(epif) \neq \emptyset$. Dĩ nhiên $\left(x^0, f\left(x^o\right)\right) \notin \operatorname{int}(epif)$, nên ta có một siêu phẳng tách điểm đó với $\operatorname{int}(epif)$, tức là ta có một véc tơ $(t, t_{n+1}) \in H \backslash \{0\}$. Sao cho $\left\langle t,\, x^0\right\rangle + t_{n+1} f\left(x^0\right) \geq \langle t,\, x\rangle + \alpha t_{n+1}, \forall (x,\, \alpha) \in epif$ vì $(x, \alpha) \in epif$. Kéo theo $(x, \beta) \in epif, \forall \beta \geq \alpha$ cho nên ta cũng có $\left\langle t, x^0\right\rangle + t_{n+1} f\left(x^o\right) \geq \langle t, x\rangle + t_{n+1}\beta, \forall \beta \geq \alpha$ cho $\beta \to +\infty \Rightarrow t_{n+1} \leq 0$.

Nếu $t_{n+1} = 0$ thì bất đẳng thức này trở thành $\left\langle t, x^0\right\rangle \geq \langle t, x\rangle \forall x \in d\mathrm{omf}$, tức là x^0 đạt cực đại của hàm tuyến tính $\langle t, x\rangle$ trên domf, mà $x^0 \in \operatorname{int}(d\mathrm{omf})$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $t = 0$ mâu thuẫn với $(t, t_{n+1}) \neq 0$ vậy $t_{n+1} < 0$. Đặt $p = \frac{-t}{t_{n+1}}, \alpha = f(x)$ ta sẽ nhận được $\left\langle p, x - x^0\right\rangle + f\left(x^0\right) \leq f(x), \forall x \in H$.

Chứng minh $\partial f\left(x^0\right)$ lồi, lấy bất kỳ $p^1, p^2 \in \partial f\left(x^0\right), \lambda \in [0,1]$ khi đó với $\forall x \in H$. Ta xét:

$\left\langle \lambda p^1, x - x^0\right\rangle \leq \lambda\left(f(x) - f\left(x^0\right)\right)$.

$\left\langle (1-\lambda) p^2, x - x^0\right\rangle \leq (1-\lambda)\left(f(x) - f\left(x^0\right)\right)$.

$\Rightarrow \left\langle \lambda p^1 + (1-\lambda) p^2, x - x^0\right\rangle \leq f(x) - f\left(x^0\right)$.

Vậy $\Rightarrow \lambda p^1 + (1-\lambda) p^2 \in \partial f\left(x^o\right) \Rightarrow \partial f\left(x^0\right)$ lồi nên $\partial f\left(x^0\right)$ là tập đóng, lấy $p^k \in \partial f\left(x^0\right), p^k \to p$. Từ $\left\langle p^k, x - x^0\right\rangle + f\left(x^0\right) \leq f(x), \forall x \in H \Rightarrow \left\langle p, x - x^0\right\rangle + f\left(x^0\right) \leq f(x), \forall x \in H$, chứng tỏ $p \in \partial f\left(x^0\right)$ nên suy ra $\lambda p^1 + (1-\lambda) p^2 \in \partial f\left(x^0\right)$ lồi. Chứng tỏ $p \in \partial f\left(x^0\right)$.

Mệnh đề 1.4. *Nếu f là hàm lồi chính thường, khả vi tại điểm $x^0 \in \mathrm{domf}$ thì $\partial f\left(x^0\right) = \left\{\nabla f\left(x^0\right)\right\}$, nghĩa là $\nabla f\left(x^0\right)$ là véc tơ dưới grandiet duy nhất của f tại x^0.*
Nếu f khả vi tại x^0 thì $f'\left(x^0, d\right) = \left\langle \nabla f\left(x^0\right), d\right\rangle$ vì thế véc tơ p là dưới grandient của f tại x^0 khi và chỉ khi $\langle p, d\rangle \leq \left\langle \nabla f\left(x^0\right), d\right\rangle$ với mọi d từ đó$\Rightarrow p = \nabla f\left(x^0\right)$.
Nếu f có tại x^0 một véc tơ dưới grandient duy nhất thì f khả vi tại x^0.

Định lý 1.2. *Giả sử $A: H \to H$ là toán tử tuyến tính và g là hàm lồi chính thường trên H. Khi đó với mọi $x \in H$*

$$A^T \partial g(Ax) \subset \partial (g \circ A)(x).$$

Hơn nữa nếu g liên tục tại một điểm nào đó thuộc $\operatorname{Im}(A)$ *(ảnh của A) thì:*

$$A^T \partial g\left(\mathrm{Ax}\right) = \partial\left(g \circ A\right)(x) \qquad \forall x \in H.$$

Định nghĩa 1.11. *Cho tập lồi $C \subset H$ và $y \in H$. Ta gọi hình chiếu của y trên C là điểm $x^0 \in C$:*

$$\left\|x^0 - y\right\| = \inf_{x \in C} \|x - y\| = d_C\left(y\right).$$

Kí hiệu: $x^0 = p\left(y\right)$ và $d_C\left(y\right)$ gọi là khoảng cách từ y tới C.

Bổ đề 1.1. *Muốn cho điểm $x^* \in C$ là hình chiếu của điểm y trên tập lồi đóng C điều kiện cần và đủ là:*

$$\langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0. \qquad \forall x \in C \tag{1.2}$$

Chứng minh. Giả sử x^* là hình chiếu của y trên C lấy điểm tùy ý $x \in C$ và xét điểm $z = \lambda x + (1 - \lambda)\, x^*$. C lồi nên với mọi $\lambda \in [0, 1]$ thì $z \in C$ ta có:

$$\|z - y\|^2 = \lambda^2 \|x - x^*\|^2 + 2\lambda \left\langle x - x^*, x^* - y\right\rangle + \|x^* - y\|.$$

Do $\|z - y\|^2 \geq \|x^* - y\|^2$ nên $\lambda^2 \|x - x^*\|^2 + 2\lambda \langle x - x^*, x^* - y\rangle \geq 0.$
Do đẳng thức này đúng với mọi $\lambda \in [0, 1]$ nên $\langle x - x^*, x^* - y\rangle \geq 0$ từ đó suy ra (1.2). Ngược lại giả sử có (1.2) khi đó với mọi $x \in C$ ta có:

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - x^*) + (x^* - y)\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 + 2\left\langle x - x^*, x^* - y\right\rangle + \|x^* - y\|^2 \\ &\geq \|x^* - y\|^2.\end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ x^* là hình chiếu của y trên C.

Mệnh đề 1.5. *Muốn cho điểm x^* của tập lồi đóng C là điểm cực tiểu của hàm lồi khả vi $f\left(x\right)$ trên C, điều kiện cần và đủ là $x^* = p\left(y^*\right)$ trong đó $y^* = x^* - \alpha \nabla f\left(x^*\right)$ với $\alpha > 0$ là một số bất kỳ.*
Chứng minh. Đủ: Giả sử $x^* = p\left(y^*\right)$. Do $p\left(y^*\right)$ là hình chiếu của điểm y^* trên C nên ta có:

$$\langle x - x^*, y^* - x^* \rangle \leq 0 \qquad \forall x \in C.$$

Vì $y^* = x^* - \alpha \nabla f\left(x^*\right)$ và $\alpha > 0$ ta suy ra $\langle \nabla f\left(x^*\right), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$ nên x^* là điểm cực tiểu của hàm $f\left(x\right)$ trên C.