ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN ĐĂNG ĐÀI**

# BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG GIẢI PH- ƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐỐI VỚI TOÁN TỬ VI PHÂN PHÂN

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2012**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

**TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN ĐĂNG ĐÀI**

# BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG GIẢI PH- ƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐỐI VỚI TOÁN TỬ VI PHÂN PHÂN

**Chuyên ngành: Toán ứng dụng**

**Mã số: 60 46 01 12**

## LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Ng□ời h□ớng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc**

**THÁI NGUYÊN - 2012**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

NGUYỄN ĐĂNG ĐÀI

# BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐỐI VỚI TOÁN TỬ VI PHÂN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2012

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

----------

**NGUYỄN ĐĂNG ĐÀI**

# BIẾN ĐỔI FOURIER PHÂN VÀ ỨNG DỤNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐỐI VỚI TOÁN TỬ VI PHÂN PHÂN

**Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG**
**Mã số: 60.46.36**

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học**
**TS. NGUYỄN VĂN NGỌC**

**Thái Nguyên - Năm 2012**

# Mục lục

# MỞ ĐẦU

## 1. Lý do chọn luận văn.

Các biến đổi Fourier phân là những công cụ toán học có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học và kỹ thuật. Biến đổi Fourier phân đã được giới thiệu vào khoảng năm 1929. Những biến đổi này được ứng dụng đặc biệt trong cơ học lượng tử, vật lý lý thuyết, hóa học, quang học, kỹ thuật điện, sử lý tín hiệu và nhiều lĩnh vực khác đã khiến cho những biến biến đổi Fourier là một trong ba tiến bộ quan trọng nhất của của toán học trong một phần tư cuối cùng của thế kỷ XIX.

Những bài viết đầu tiên về biến đổi Fourier phân được thực hiện bởi: Wiener 1929, Condon 1937, Bargmann 1961, de Bruijn 1937. Điều quan trọng là trong suốt thập niên 80 của thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều bài viết đi theo hai chiều hướng khác biệt: Namias 1980 [5], McBride và Kerr 1987 [4] ... Tuy nhiên, số lượng các ấn phẩm chỉ thực sự bùng nổ sau khi phép biến đổi áp dụng trong quang học và sử lý tín hiệu được công bố.

Biến đổi Fourier phân là sự khái quát của toán tử tích phân Fourier thông thường. Việc nghiên cứu phép biến đổi Fourier phân đóng một vai trò quan trọng trong việc giải phương trình khuếch tán phân đối với toán tử vi phân phân với các biến không gian - thời gian [3,7]. Để giải phương trình khuếch tán phân ngoài biến đổi Fourier phân thì cũng cần đến biến đổi Laplace. Nghiệm $u_\nu = u_\nu(x,t)$ của phương trình khuếch tán phân với cấp $0 < \nu \leq 2$ là mật độ của tích các loại khác nhau của quá trình ngẫu nhiên. Đối với phương trình khuếch tán phân cấp $\nu = \frac{1}{2^n}, n \geq 1$, nghiệm $u_{1/2^n}$ là tương ứng của phân phối của chuyển động Brownian lặp n lần. Trường hợp của phương trình khuếch tán phân cấp $\nu = \frac{2}{3^n}, n \geq 1$ liên quan tới chuyển động Brownian và quá trình với mật độ biểu thị trong các số hạng của hàm Airy. Trong trường hợp đặc biệt $u_\nu$ là trùng với phân phối của chuyển động Brownian với thời gian ngẫu nhiên hoặc của quá trình khác nhau với một thời gian Brownian.

Các kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng phép biến đổi Fourier có nhiều ứng dụng trong vật lý, cơ học điện tử, kĩ thuật điện và một số ngành khoa học khác. Sự ứng dụng rộng dãi trên nhiều lĩnh vực khoa học và toán học của phép biến đổi Fourier và ứng dụng giải phương trình khuếch tán phân đối với toán tử vi phân phân đã nói lên tầm quan trọng của vấn đề này. Vì thế, tôi lựa chọn luận văn này là mong muốn tiếp cận, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

**2. Mục đích của luận văn.**

Mục đích của luận văn này là học tập và giới thiệu các kết quả nổi bật về các biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa được quan tâm nhiều và ứng dụng của nó trong việc giải phương trình khuếch tán phân đối với toán tử vi phân phân với các biến không gian - thời gian nhằm thúc đẩy sự phát triển khoa học kỹ thuật trong khoảng hai thập niên gần đây.

**3. Nội dung của luận văn.**

Luận văn bao gồm phần Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

**Chương 1**: Giới thiệu tổng quan về biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa xét trong không gian Lizorkin. Đây là một trong những phép biến đổi Fourier phân được quan tâm nhiều hơn cả về lý thuyết cũng như ứng dụng.

**Chương 2**: Giới thiệu về ứng dụng của biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa để giải phương trình khuếch tán phân đối với toán tử vi phân phân với các biến không gian - thời gian.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học. Em xin được bày

tỏ lòng biêt ơn sâu sắc đến Thầy. Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K4C đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Đăng Đài

# Chương 1

# Biến đổi Fourier phân dạng lũy thừa

Trong chương này trình bày cơ sở của biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa do Y. Luchko, H. Martinez, J. Trujillo đưa ra trong [3], mà chúng tôi tạm gọi là biến đổi Fourier phân dạng luỹ thừa MLT. Phép biến đổi này được xét trong không gian Lizorkin.

## 1.1 Không gian Lizorkin

Không gian Lizorkin là một không gian con của không gian các hàm giảm nhanh $\mathcal{S}$, vì vậy trước hết chúng tôi trình bày khái niệm về không gian $\mathcal{S}$ [ 2].

**Định nghĩa 1.1.1.** *Ký hiệu $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ là tập hợp của tất cả các khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$, sao cho*

$$|[\varphi]|_{m,n} := \sup_{n\leq m, x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^m |D^n\varphi(x)| < \infty, D = d/dx,$$

*$m, n = 0, 1, ...$ Dãy $\{\varphi_k\}$ các hàm trong $\mathcal{S}$ hội tụ trong $\mathcal{S}$ đến hàm $\varphi_o \in \mathcal{S}$, nếu $|[\varphi_k - \varphi_o]| \to 0$ khi $k \to +\infty$.*

**Định nghĩa 1.1.2.** *([ 2]) Biến đổi Fourier $\hat{u}(\xi)$ của hàm $u(t) \in \mathcal{S}$ được cho bởi công thức*

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{i\xi t}dt \tag{1.1}$$