ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ LÝ

PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chuyên Nghành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã Số: 60. 46. 0112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM NGỌC ANH

Thái Nguyên - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày .... tháng .... năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc với PGS. TS Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông), người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong Bộ môn Toán - Tin, Phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ Quốc tế, các bạn học viên lớp Cao học Toán K4C trường Đại học Khoa học - Đại Học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành khóa học cao học này.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Mặc dù có nhiều cố gắng song luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy, cô giáo và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012

Tác giả

Hoàng Thị Lý

Những ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	: Tập hợp số thực.
$\mathbb{R}^n$	: Không gian véc tơ thực n chiều.
$\mathbb{R}^n_+$	: Không gian véc tơ thực không âm n chiều.
$x \in D$	: x thuộc tập D.
$x \notin D$	: x không thuộc tập D.
$\forall x$	: Với mọi x.
$\exists x$	: Tồn tại x.
$\varnothing$	: Tập hợp rỗng.
$\cap$	: Phép giao các tập hợp.
$\cup$	: Phép hợp các tập hợp.
$x := y$	: x được định nghĩa bằng y.
$+\infty$	: Dương vô cùng.
$-\infty$	: Âm vô cùng.
$\overline{C}$	: Bao đóng của tập C.
$\langle x, y\rangle$	: Tích vô hướng của x và y.
$\partial f(x)$	: Dưới vi phân của f tại x.
$x_n \to x$	: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x.
$x_n \rightharpoonup x$	: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x.
$d(x, y)$	: Khoảng cách giữa x và y.
I	: Ánh xạ đồng nhất.
H	: Không gian Hilbert thực.

Mở đầu

Bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tìm điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn là một trong các lĩnh vực quan trọng của giải tích hiện đại và lý thuyết tối ưu. Trong những năm gần đây, việc nghiên cứu thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm các bài toán này là một đề tài hấp dẫn đối với rất nhiều các nhà khoa học trên thế giới. Trong luận văn này, ta sẽ trình bày phương pháp xấp xỉ dưới đạo hàm cho bài toán cân bằng và các ánh xạ không giãn. Luận văn gồm hai phần chính:

Phần thứ nhất trình bày thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn trong bài báo của R. Wangkeeree (2008), *"An Extragradient Approximation Method for Equilibrium Problems and Fixed Points Problems of Countable Families of Nonexpansive Mapping, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2008, Art. ID 134148, 17 PP, Doi: 10.1155/2008/134148"*. Phương pháp giải của bài báo này đại diện cho một cách tiếp cận phổ biến nhất hiện nay. Trong đó, mỗi bước lặp chính của phương pháp lặp này là việc giải một bài toán cân bằng phụ đơn điệu mạnh, khi mà song hàm của bài toán cân bằng tương ứng là đơn điệu.

Phần thứ hai đề cập đến phương pháp lặp trong bài báo của P. N. Anh, L. B. Long, N. V. Quy and L. Q. Thuy (2012), *"Weak Convergence Theorems for an Infinite Family of Nonexpansive Mappings and Equilibrium Problems, JP Journal of Fixed Point Theory and Applications, Vol. 7, PP. 113-127"*. Trong bài báo này, bằng cách kết hợp giữa phương pháp dưới đạo hàm cho bài toán cân bằng và các kỹ thuật điểm bất động, các tác giả đã đề xuất một thuật toán mới để tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn. Ở đây, mỗi bước lặp chính trong thuật toán đề xuất là việc giải một bài toán lồi mạnh với giả thiết giả đơn điệu và tính liên tục kiểu Lipschitz của hàm giá.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và các tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong luận văn được trình bày thành ba chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức về giải tích lồi, bài toán cân bằng, ánh xạ không giãn và các kiến thức bổ trợ. Chương 2 trình bày thuật toán tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và tập các điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn. Chương 3 trình bày sơ đồ lặp tìm nghiệm chung của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập các điểm bất động của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn dựa trên phương pháp dưới đạo hàm và các kĩ thuật điểm bất động.

Chương 1
Một số khái niệm cơ bản

Trong luận văn này, ta xét bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H. Với mỗi véc tơ $x \in H$, chuẩn của x, kí hiệu là $\|x\|$, được xác định bởi:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Kí hiệu $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ là tập số thực mở rộng.

Sau đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,... Các kiến thức này được lấy chủ yếu từ các tài liệu [4], [5].

1.1. Tập lồi

Định nghĩa 1.1. *Cho C là một tập con khác rỗng của H. Tập C được gọi là lồi nếu*

$$\forall a, b \in C,\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda)\, a + \lambda b \in C.$$

Ví dụ 1.1. *Các tập sau đây là các tập lồi:*

1) Hình cầu $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| \leqslant r\}$.

2) Các nửa không gian đóng

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leqslant \alpha\}\,;\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geqslant \alpha\},$$

hay các nửa không gian mở

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle < \alpha\}\,;\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle > \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. *Một tập $C \subset H$ được gọi là nón nếu*

$$\forall\, x \in C,\, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó đồng thời là một tập lồi. Như vậy, một tập con $C \subset H$ là nón lồi khi và chỉ khi nó có các tính chất sau:

(i) $\lambda C \subset C, \quad \forall \lambda > 0;$

(ii) $C + C \subset C.$

Ví dụ 1.2. *Các tập sau đây là các nón lồi:*

1) $R^n_+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n\}.$

2) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \|x\| \leqslant y\}.$

Trong phần này, tập $C \subset H$ luôn giả thiết là một tập lồi (nếu không giải thích gì thêm).

Định nghĩa 1.3. *Cho $x^0 \in C$, nón pháp tuyến ngoài (hay nón pháp tuyến) của C tại x^0, kí hiệu là $N_C\left(x^0\right)$, được định nghĩa bởi*

$$N_C\left(x^0\right) := \left\{t \in H : \left\langle x - x^0, t\right\rangle \leqslant 0,\, \forall x \in C\right\}.$$

1.2. Hàm lồi

Định nghĩa 1.4. *Cho hàm $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$. Khi đó, miền hữu hiệu của f, kí hiệu là $domf$, được xác định bởi*

$$domf := \{x \in C : \ f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là chính thường nếu

$$domf \neq \phi \text{ và } f(x) > -\infty, \ \forall x \in C.$$

Định nghĩa 1.5. *Cho hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó, hàm f được gọi là* *i) lồi trên C nếu* $\forall x, y \in C,\ \lambda \in [0,1]$ *, ta có*

$$f\left((1-\lambda)\,x+\lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)\,f\left(x\right)+\lambda f\left(y\right);$$

ii) lồi chặt trên C nếu $\forall x, y \in C, x \neq y, \lambda \in (0,1)$ *, ta có*

$$f\left((1-\lambda)\,x+\lambda y\right) < (1-\lambda)\,f\left(x\right)+\lambda f\left(y\right);$$

iii) tựa lồi trên C nếu $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*, tập mức dưới*

$$L_\alpha = \{x \in C: \ \ f\left(x\right) \leqslant \alpha\}$$

là tập lồi.

Ví dụ 1.3. *Cho C là một tập lồi, khác rỗng của* $\mathbb{R}^n$*. Hàm chỉ trên C*

$$\delta_C\left(x^0\right) = \begin{cases} 0 & khi\ \ x^0 \in C, \\ +\infty & khi\ \ x^0 \notin C, \end{cases}$$

là hàm lồi.

Định nghĩa 1.6. *Cho* $x^0 \in C$*. Một hàm* $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$ *được gọi là*

i) nửa liên tục dưới tại x^0 *nếu*

$$\liminf_{x \to x^0} f\left(x\right) \geqslant f\left(x^0\right);$$

ii) nửa liên tục trên tại x^0 *nếu*

$$\limsup_{x \to x^0} f\left(x\right) \leqslant f\left(x^0\right).$$

Nếu hàm f vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới tại x^0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Hàm f liên tục (nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) trên C nếu nó liên tục (tương ứng: nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới) tại mọi điểm thuộc C.