ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

Nguyễn Anh Hải

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA GIÁC

Chuyên ngành: Phương Pháp Toán Sơ Cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Lời cám ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH Hà Huy Khoái. Từ khi được nhận đề tài cho đến nay, tác giả luôn nhận được sự giúp đỡ, sự chỉ bảo ân cần của Giáo sư. Với định hướng rõ ràng và phương pháp làm việc khoa học, nghiêm túc, Giáo sư đã giúp tác giả hoàn thành luận văn này. Không những thế, Giáo sư còn cho chúng tôi nhiều bài học về tinh thần chủ động sáng tạo trong công việc, về tính phối hợp, tính kiên trì và khoa học trong khi làm việc, về lòng bao dung, về tình cảm thầy trò. Qua đây, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Hà Huy Khoái, người đã giúp tác giả hoàn thành luận văn này. Xin trân trọng cám ơn các thầy giáo, cô giáo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã nhiệt tình giảng dạy và tạo những điều kiện tốt nhất cho chúng em học tập, nghiên cứu trong suốt 2 năm vừa qua. Xin trân trọng cám ơn các thầy giáo, cô giáo trong Hội đồng khoa học Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo, cô giáo trong Ban Giám hiệu, trong tổ Toán trường THPT Trung Giã, các bạn học viên lớp cao học toán K4C đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu giúp tác giả hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã rất cố gắng nghiên cứu đề tài và viết luận văn, nhưng vì thời gian có hạn, kiến thức và kinh nghiệm còn hạn chế nên khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy, các cô, sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh và thiết thực hơn.

Tác giả

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài.

Các bài toán về đa giác rất thường gặp trong chương trình toán phổ thông. Với nhiều bài toán hay, dạng toán phong phú nên đa giác là đề tài hấp dẫn nhiều người, đặc biệt là đối với các giáo viên và các em học sinh đang giảng dạy và học tập trong các trường phổ thông. Các bài toán về đa giác nói riêng và môn Hình học nói chung thường là rất khó đối với các em học sinh, bởi môn học đòi hỏi trí tưởng tượng cao, một tư duy lôgic, chặt chẽ và sáng tạo. Vì vậy đã có nhiều phương pháp tiếp cận và nghiên cứu như phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ, ... để bài toán trở nên đơn giản hơn. Đến nay, Số phức đã được đưa vào giảng dạy trong chương trình toán phổ thông, một mặt cho học sinh thấy được ý nghĩa ra đời và sự phát triển của các tập hợp số, một mặt cũng cần gợi ý cho học sinh thấy được những ứng dụng to lớn của Số phức trong việc nghiên cứu và học tập môn Toán, đặc biệt là những ứng dụng trong Hình học. Tuy nhiên, Số phức là môn học mới đối với các em học sinh, thời lượng cho môn học lại rất hạn chế. Cho nên để thực hiện những yêu cầu trên, người giáo viên phải tìm hiểu kỹ lưỡng nội dung chương trình. Hiện nay tôi đang là một giáo viên giảng dạy ở một trường THPT, để thực hiện nhiệm vụ của mình thì việc nghiên cứu đề tài là rất cần thiết. Với trách nhiệm, với sự đam mê nghiên cứu khoa học và sáng tạo tôi đã lựa chọn đề tài này. Vì thời gian có hạn, trong đề tài này tác giả chỉ xin được trình bày một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu và giải quyết một số bài toán về đa giác. Cũng chính vì thế nội dung trong đề tài này gồm các kiến thức về số phức, một số kiến thức về hình học và một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu giải một số bài toán về đa giác.

2. Mục đích nghiên cứu:

Hệ thống và tổng quát các bài toán về đa giác bằng phương pháp số phức và các ứng dụng khác nhau trong trường phổ thông. Đồng thời nắm được một số kĩ thuật tính toán biến đổi hình học liên quan đến số phức.

3. Nhiệm vụ của đề tài: Đưa ra định nghĩa và các phép toán về số phức một cách tổng quát có ví dụ minh họa kèm theo, ngoài ra đề tài đi sâu mở rộng các mảng kiến thức về số phức áp dụng trong hình học, đặc biệt là các bài toán về đa giác.

Bên cạnh đó, qua việc nghiên cứu đề tài trang bị cho bản thân thêm một số nguồn tư liệu trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Nghiên cứu các bài toán hình học, đặc biệt là phần đa giác trên tập hợp số phức và xét các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS – TSKH Hà Huy Khoái, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ, Tuyển tập Số phức từ A tới Z của Titu Andreescu và Dorin Andrica,...

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh Trung học phổ thông. Đóng góp thiết thực cho việc dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo trong việc dạy và học toán.

6. Cấu trúc của luận văn:

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Số phức và các dạng biểu diễn

Chương 2: Số phức và hình học

Chương 3: Tích thực, tích phức và các ứng dụng trong đa giác.

Thái Nguyên, 2012

Chương 1

Số phức và các dạng biểu diễn của số phức

1.1 Định nghĩa số phức

Giả thiết ta đã biết định nghĩa và các tính chất cơ bản của tập số thực $\mathbb{R}$ Ta xét tập hợp

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

Hai phần tử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Các phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$ như sau :

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

và

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1)\,.\,(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$$

với mọi $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Phần tử $z_1 + z_2$ gọi là tổng của z_1, z_2, phần tử $z_1.z_2 \in \mathbb{R}^2$ gọi là tích của z_1, z_2.

Nhận xét

1) Nếu $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1z_2 = (x_1x_2, 0)$.
2) Nếu $z_1 = (0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (0, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1z_2 = (-y_1y_2, 0)$.

Định nghĩa

Tập hợp $\mathbb{R}^2$ cùng với phép cộng và nhân gọi là tập số phức, kí hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi phần tử $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức.

Kí hiệu $\mathbb{C}^*$ để chỉ tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

1.2 Các tính chất liên quan đến phép cộng

Phép cộng các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây:
Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
Tính kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
Phần tử đơn vị: Với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, Có duy nhất một số phức $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ để $z + 0 = 0 + z$. Số phức $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ được gọi là phần tử đơn vị của phép cộng các số phức.
Phần tử đối: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ có duy nhất số phức $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ sao cho $z + (-z) = (-z) + z = 0$

1.3 Các tính chất liên quan đến phép nhân

Phép nhân các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây:
Tính giao hoán: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
Tính kết hợp: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
Phần tử đơn vị: Với mọi $z \in \mathbb{C}$, có duy nhất số phức $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $z.1 = 1.z = z$. Số phức $1 = (1, 0)$, gọi là phần tử đơn vị của phép nhân các số phức.
Phần tử nghịch đảo: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ có duy nhất số phức $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$ sao cho $z.z^{-1} = z^{-1}z = 1$ số phức $z^{-1} = (x', y')$ gọi là phần tử nghịch đảo của số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Lũy thừa với số mũ nguyên của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ được định nghĩa như sau:
$z^0 = 1\,;\ z^1 = z\ ;\ z^2 = z.z$, và $z^n = \underbrace{z.z...z}_{n \text{ lầ n}}$ với mọi số nguyên dương n và $z^n = (z^{-1})^{-n}$ với mọi số nguyên âm n.

Mọi số phức $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ và mọi số nguyên m,n ta có các tính chất sau:

1) $z^m.z^n = z^{m+n}$;
2) $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$;
3) $(z^m)^n = z^{mn}$;
4) $(z_1z_2)^n = z_1^n z_2^n$;
5) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$;

Khi $z = 0$ ta định nghĩa $0^n = 0$ với mọi số nguyên $n > 0$.

Tính phân phối: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$.

Trên đây là những tính chất của phép cộng và phép nhân. Tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức cùng với các phép toán trên lập thành một trường.

1.4 Dạng đại số của số phức

1.4.1 Định nghĩa và tính chất

Mỗi số phức được biểu diễn như một cặp số sắp thứ tự, nên khi thực hiện các biến đổi đại số thường không được thuận lợi. Đó là lí do để ta đi tìm dạng khác khi viết.

Ta sẽ đưa vào dạng biểu diễn đại số mới. Xét tập hợp $\mathbb{R} \times \{0\}$ cùng với phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$.

Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$, $f(x) = (x, 0)$ là một song ánh; ngoài ra $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ và $(x, 0).(y, 0) = (xy, 0)$.

Người đọc sẽ không sai lầm nếu chú ý rằng các phép toán đại số trên $\mathbb{R} \times \{0\}$ đồng nhất với các phép toán trên $\mathbb{R}$; vì thế chúng ta có thể đồng nhất cặp số $(x, 0)$ với số x, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta sử dụng song ánh trên và kí hiệu $(x, 0) = x$.

Xét $i = (0, 1)$ ta có

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0).(0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1).(y, 0) \end{aligned}$$

Từ trên ta có mệnh đề

Mệnh đề 1.4.1. *Mỗi số phức $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi,$$

với $x, y \in \mathbb{R}$.

Hệ thức $i^2 = -1$ được suy ra từ định nghĩa phép nhân $i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$

Định nghĩa

Biểu thức $x + yi$ được gọi là biểu diễn đại số của số phức $z = (x, y)$. Vì thế ta có thể viết $\mathbb{C} = \left\{x + yi \,|x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\,,\ i^2 = -1\right\}$. Từ giờ ta kí hiệu $z = (x, y)$ bởi $z = x + yi$. Số thực $x = \mathrm{Re}(z)$ được gọi là phần thực của số phức z, $y = \mathrm{Im}(z)$ được gọi là phần ảo của z. Số phức có dạng yi , $y\ \in \mathbb{R}$ gọi là số **ảo**. Số phức có dạng yi , $y\ \in \mathbb{R}^*$ gọi là số **thuần ảo**, số phức i gọi là số **đơn vị ảo**

Từ các hệ thức trên ta dễ dàng có các kết quả sau:

a) $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ và $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$;

b) $z \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Im}(z) = 0$;

c) $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

Sử dụng dạng đại số, các phép toán về số phức được thực hiện như sau:

Phép cộng

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i\ \in \mathbb{C}.$$

Dễ thấy tổng hai số phức là một số phức có phần thực là tổng các phần thực, có phần ảo là tổng các phần ảo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1 + z_2) &= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1 + z_2) &= \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2).\end{aligned}$$

Phép trừ

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i\ \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1 - z_2) &= \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)\\ \mathrm{Im}(z_1 - z_2) &= \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2).\end{aligned}$$

Phép nhân

$$z_1.z_2 = (x_1 + y_1 i).(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i\ \in \mathbb{C}$$