ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN VĂN SOẠN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM CÂN BẰNG BLUM-OETTLI VÀ MỘT SỐ MỞ RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN VĂN SOẠN

ĐỊNH LÍ ĐIỂM CÂN BẰNG BLUM-OETTLI VÀ MỘT SỐ MỞ RỘNG

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH

MÃ SỐ: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:T.S Lê Văn Chóng

Thái Nguyên-2009

Mục lục

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức biến phân đơn điệu và bất đẳng thức Ky Fan có nhiều điểm gần nhau. Bất đẳng thức biến phân đơn điệu với nhiều ứng dụng đã được nghiên cứu từ những năm sáu mươi của thế kỉ trước. Bất đẳng thức Ky Fan ngay sau khi được công bố (1972) đã thu hút sự chú ý của nhiều nghiên cứu trong lĩnh vực giải tích phi tuyến bởi sự gần gũi với bất đẳng thức biến phân đơn điệu và khả năng ứng dụng sâu rộng của nó. Vì vậy người ta tìm cách kết nối hai kết quả này với nhau trong một kết quả chung. Kết quả đầu tiên của sự kết nối này là của Brezis-Nirenberg-Stampacchia(1972). Năm 1993, Blum-Oettli công bố một kết quả tiếp theo về sự kết nối này. Đây là kết quả hợp nhất hai hướng nghiên cứu cơ bản của bài toán cân bằng, đó là bài toán cân bằng có giả thiết đơn điệu và bài toán cân bằng không có giả thiết đơn điệu.

Bài toán cân bằng được xét bởi Blum-Oettli(1993) có dạng sau:

Tìm $\overline{x} \in C$ sao cho $g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \geq 0$ với mọi $y \in C$,

trong đó C là một tập lồi đóng trong một không gian vectơ tôpô X nào đó, hàm $g : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ được giả thiết là đơn điệu và hàm $h : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ không nhất thiết là hàm đơn điệu ($\mathbb{R}$ là tập số thực).

Nếu $h = 0$ ta nhận được kết quả về bài toán cân bằng đơn điệu (mở rộng bất đẳng thức biến phân đơn điệu). Nếu $g = 0$ ta có kết quả là một mở rộng của Bất đẳng thức Ky Fan.

Sau kết quả này của Blum-Oettli, nhiều kết quả khác có liên quan hoặc mở rộng được công bố. Đó là các kết quả nghiên cứu mở rộng vô hướng và mở rộng vectơ, đơn trị và đa trị, đối với kết quả của Blum-Oettli [3].

Mục đích của luận văn là tập hợp trình bày một số kết quả nghiên cứu cơ bản xung quanh kết quả của Blum-Oettli [3]. Đó là một số kết quả tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng có và không có giả thiết đơn điệu khởi nguồn cho kết quả của Blum-Oettli, các kết quả chính của Blum-Oettli và một số kết quả mở rộng.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương.

Chương 1 trình bày một số kết quả cơ bản về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng ở hai hướng nghiên cứu có giả thiết đơn điệu và không có giả thiết đơn điệu, với điều kiện bức cổ điển và nơi giảm. Chúng tôi trình bày các kết quả này với mục đích để thấy rõ hơn sự kết nối của hai hướng nghiên cứu này trong kết quả của Blum-Oettli[3], kết nối ở kết quả và kết nối ở ý tưởng chứng minh các kết quả. Các kết quả nghiên cứu được trình bày ở đây chủ yếu được tập hợp từ các bài báo Mosco[11], Allen[1], Chong[6].

Chương 2 trình bày kết quả trung tâm của luận văn. Đó là kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng được thiết lập bởi Blum-Oettli [3]. Kết quả này cùng ý tưởng chứng minh của nó là sự hợp nhất các kết quả cùng ý tưởng chứng minh của chúng được trình bày ở chương 1. Trong chương này chúng tôi cũng trình bày một kết quả có liên quan và được công bố trước kết quả của Blum-Oettli [3], đó là công trình của Brezis-Nirenberg-Stampacchia [4], đồng thời trình bày một kết quả là mở rộng vô hướng đối với kết quả của Blum-Oettli [3], đó là công trình của Chadli-Chbani-Riahi [7].

Chương 3 đề cập đến sự mở rộng kết quả của Blum-Oettli[3] ra bài toán cân bằng cho hàm vectơ, đơn trị và đa trị. Các kết quả ở đây được tập hợp từ các tài liệu Bianchi-Hadjisavvass-schaible[2],Tấn-Tĩnh[13],Tấn-Minh[14].

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học sư phạm-Đại Học Thái Nguyên. Trước hết tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Lê Văn Chóng, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ và nghiêm khắc trong khoa học để tôi hoàn thành luận văn này. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô giáo trong Trường ĐHSP-Thái Nguyên, Viện toán học Việt Nam, Trường ĐHSP Hà Nội đã giảng dạy giúp tôi hoàn thành khóa học. Tôi xin cảm ơn Sở giáo dục và đào tạo Bắc Giang, Trường THPT Lý Thường Kiệt và Trường THPT Việt Yên số 1 Bắc Giang, gia đình và bạn bè đã luôn tạo điều kiện, động viên, giúp tôi suốt trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Chương 1

BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỆU VÀ KHÔNG CÓ GIẢ THIẾT ĐƠN ĐIỆU

Hai hướng nghiên cứu quan trọng trong các nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng là các nghiên cứu dùng giả thiết đơn điệu và không dùng giả thiết đơn điệu. Các kết quả và ý tưởng chứng minh ở hai hướng nghiên cứu này là cơ sở cho việc thiết lập và chứng minh Định lí điểm cân bằng Blum-Oettli [3] được trình bày ở chương sau. Vì vậy trong chương này chúng tôi trình bày một số kết quả cơ bản ở hai hướng nghiên cứu nêu trên. Những kết quả này được tập hợp từ các bài báo của Mosco [11], Allen[1], Chong[6]. Trước tiên chúng tôi đưa ra dạng chung của bài toán cân bằng và một số trường hợp riêng quen biết có tính đơn điệu và không đơn điệu.

1.1. BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Bài toán cân bằng được Blum-Oettli[3] hiểu là bài toán sau:

$$\text{Tìm } \overline{x} \in C \text{ sao cho } f(\overline{x}, y) \leq 0 \text{ với mọi } y \in C, \tag{EP}$$

trong đó C là một tập cho trước và $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm cho trước.

Đối với bài toán cân bằng trong không gian véctơ tôpô X, tập C thường được xét là tập lồi.

Hàm f được gọi là đơn điệu nếu $f(x,y)+f(y,x) \geq 0$ với mọi $x,y \in C$.

Khái niệm này là mở rộng của khái niệm toán tử đơn điệu. Toán tử $A : C \longrightarrow X^*$ gọi là đơn điệu nếu $\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0, \forall x, y \in C$, ở đây X^* là không gian đối ngẫu của X.

Hàm f được gọi là hemi-liên tục nếu với $x, y \in C$ cho trước tùy ý hàm số $f(x + t(y - x), y)$ là nửa liên tục dưới theo t trên $[0; 1]$.

Khái niệm này là mở rộng của khái niệm toán tử hemi-liên tục. Toán tử $A : C \longrightarrow X^*$ gọi là hemi-liên tục nếu hàm $\langle A(x + ty), z\rangle$ với $x, y, z \in C$ bất kỳ cố định là nửa liên tục dưới theo t trên $[0; 1]$.

Bài toán cân bằng bao hàm nhiều trường hợp riêng là các bài toán quen biết. Bất đẳng thức Ky Fan là một trường hợp riêng quan trọng. Dưới đây là một số trường hợp riêng quan trọng khác.

1. Bài toán tối ưu

Cho $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}$. Tìm $\overline{x} \in C$ sao cho $\varphi(\overline{x}) \leq \varphi(y)$ với mọi $y \in C$. Ta cũng viết: Tìm $min\{\varphi(x) \mid x \in C\}$.

Đặt $f(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y)$. Khi đó bài toán tối ưu trở thành: Tìm $\overline{x} \in C$ sao cho $f(x,y) \leq 0$ với mọi $y \in C$. Bài toán này tương đương với bài toán cân bằng và ở đây f là hàm số đơn điệu.

2. Bài toán điểm yên ngựa

Cho $\varphi : C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Khi ấy $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ gọi là điểm yên ngựa của φ nếu

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in C_1 \times C_2, \varphi(\overline{x_1}, y_2) \leq \varphi(y_1, \overline{x_2}), \forall (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2. \quad (1.1)$$

Đặt $C = C_1 \times C_2$ và cho hàm $f : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f((x_1, x_2); (y_1, y_2)) = \varphi(x_1, y_2) - \varphi(y_1, x_2).$$

Khi ấy, $\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ là nghiệm của bài toán cân bằng (EP) nếu và chỉ nếu $\overline{x}$ thỏa mãn (1.1). Dễ thấy f là hàm đơn điệu trong trường hợp này.

3. Bài toán điểm bất động

Cho $X = X^*$ là không gian Hilbert, $T : C \to C$ là một ánh xạ cho trước.

Bài toán bất động ở đây là bài toán

$$\text{Tìm } \overline{x} \in C \text{ sao cho } T(\overline{x}) = \overline{x}. \tag{1.2}$$

Đặt $f(x,y) = \langle x - Tx, x - y\rangle$. Ta có $\overline{x}$ là nghiệm của bài toán cân bằng (EP) nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của (1.2).

Thật vậy

(1.2) $\Rightarrow$ (EP): Hiển nhiên.

(EP) $\Rightarrow$ (1.2): Chọn $\overline{y} = T\overline{x}$ ta có

$$0 \geq f(\overline{x}, \overline{y}) = \| \overline{x} - \overline{y} \|^2 \geq 0 \text{ Suy ra } \overline{x} = T\overline{x}.$$

Do
$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,x) &= \langle x - Tx, x - y\rangle + \langle y - Ty, y - x\rangle \\ &= \langle Ty - Tx, x - y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle Ty - Tx, x - y\rangle + \| x - y \|^2 \\ &= -\langle Tx - Ty, x - y\rangle + \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

nên trong trường hợp này f là đơn điệu khi và chỉ khi

$$\langle Tx - Ty, x - y\rangle \leq \| x - y \|^2 .$$

4. Bài toán bất đẳng thức biến phân

Cho $T : C \longrightarrow X^\star$. Tìm $\overline{x} \in C$ sao cho

$$\langle T\overline{x}, \overline{x} - y\rangle \leq 0, \forall y \in C. \tag{1.3}$$

Đặt $f(x, y) = \langle Tx, x - y\rangle$. Rõ ràng bài toán (1.3) tương đương với bài toán cân bằng (EP) và f đơn điệu khi và chỉ khi T đơn điệu.

5. Bài toán bù

Cho C là nón lồi đóng với nón cực của nó

$$C^\star = \{x^\star \in X^\star \mid \langle x^\star, y\rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

và $T : C \to X^\star$ là ánh xạ cho trước. Bài toán bù là bài toán tìm $\overline{x} \in X$ sao cho

$$\overline{x} \in C, T\overline{x} \in C^\star, \langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle = 0. \tag{1.4}$$

Dễ thấy (1.4) tương đương với (1.3).

Thật vậy

$(1.4) \Rightarrow (1.3)$ là hiển nhiên.

Nếu (1.3) đúng, lấy $y = 2\overline{x}$ và $y = 0$ từ (1.3) ta thu được $\langle T\overline{x}, \overline{x}\rangle = 0$.

Do đó (1.3) $\Rightarrow$ (1.4).

6. Cân bằng Nash trong trò chơi

Cho I là một tập chỉ số hữu hạn (tập các người chơi). Với $i \in I$, cho trước tập K_i (tập chiến lược người chơi thứ i). Đặt $K = \prod_{i\in I} K_i$. Với mỗi $i \in I$, cho hàm $f_i : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (hàm tổn thất của người chơi thứ i, phụ thuộc vào chiến lược của tất cả người chơi). Với $x = (x_i)_{i\in I} \in K$ ta định nghĩa $x^i = (x_j)_{j\in I, j\neq i}$. Điểm $\overline{x} = (\overline{x_i})_{i\in I} \in K$ được gọi là điểm cân bằng Nash nếu với mọi $i \in I$ ta có

$$f_i(\overline{x}) \leq f_i(\overline{x^i}, y_i), \forall y_i \in K_i \tag{1.5}$$

(nghĩa là người chơi không thể giảm tổn thất của mình bằng cách đơn lẻ thay