ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KIM HOA

HÀM GREEN ĐA PHỨC VÀ XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KIM HOA

HÀM GREEN ĐA PHỨC
VÀ XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2009

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - ĐHTN, Trường THPT Chuyên Tuyên Quang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2009

Tác giả

Nguyễn Kim Hoa

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU 1

CHƯƠNG 1. HÀM GREEN ĐA PHỨC 4

1.1. Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic. 4

1.2. Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên đa tạp con đại số. 7

1.3. Các số Lelong đối với hàm đa điều hoà dưới. 10

1.4. Hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi. 11

CHƯƠNG 2. XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH 16

2.1. Bất đẳng thức đa thức trên đa tạp con đại số. 16

2.2. Định lí Bernstein - Walsh trên đa tạp con đại số. 20

2.3. Tiêu chuẩn đại số đối với đa tạp con giải tích. 22

2.4. Đa thức trực chuẩn trên đa tạp con đại số . 29

2.5. Hệ trực chuẩn Bergman trên miền siêu lồi. 33

2.6. Hệ Bergman là một cơ sở Schauder trong không gian các hàm chỉnh hình. 40

KẾT LUẬN 50

TÀI LIỆU THAM KHẢO 51

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết đa thế vị phức được phát triển từ những năm 80 của thế kỷ trước dựa trên các công trình cơ bản của Bedford-Taylor, Siciak, Zahaziuta và nhiều tác giả khác. Đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết này là hàm Green đa phức hay hàm cực trị toàn cục. Hàm Green đa phức với những điểm kỳ dị hữu hạn đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như M.Klimek, J.P. Demailly , E.A. Poletsky, A. Zeriahi,...). Theo hướng này chúng tôi quan tâm đến hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic, hàm Green đa phức với cực logarit tại vô cùng trên đa tạp con đại số và trên một đa tạp siêu lồi, đồng thời sử dụng các kết quả đạt được cho việc xấp xỉ các hàm chỉnh hình. Vì thế chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu: "*Hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình* "

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Trình bày các kết quả của Zeriahi về hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung nghiên cứu về:

- Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic.
- Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên đa tạp con đại số.
- Hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi.
- Áp dụng các kết quả đạt được để xấp xỉ các hàm chỉnh hình.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các nhiệm vụ đặt ra, chúng tôi đã đọc tham khảo các tài liệu trong và ngoài nước, tham khảo và học tập các chuyên gia cùng lĩnh vực nghiên cứu. Đồng thời kế thừa các kết quả và phương pháp của M.Klimek, J.P. Demailly , E.A. Poletsky, A. Zeriahi,... để giải quyết các vấn đề đã nêu ra ở trên.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 52 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kết quả, những tính chất quan trọng nhất về Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic. Đó là sự khái quát hoá tự nhiên định nghĩa của hàm cực trị Siciak - Zahariuta trong $\mathbb{C}^N$. Tiếp theo, chúng tôi trình bày nghiên cứu về hàm Green đa phức với cực logarit tại vô cùng trên đa tạp con đại số và trên một đa tạp siêu lồi.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày việc mở rộng một vài dạng cổ điển của lý thuyết đa thế vị trong $\mathbb{C}^N$ cho trường hợp của đa tạp con đại số X của $\mathbb{C}^N$. Chứng minh một vài bất đẳng thức đa thức đã biết giống như bất đẳng thức Bernstein –Markov và sử dụng chúng để trình bày một phép chứng minh mới tiêu chuẩn địa phương Sadullaev về tính đại số của đa tạp con giải tích. Tiếp theo chúng tôi trình bày định lý Berstein- Walsh về xấp xỉ đa thức tốt nhất của các hàm chỉnh hình trên một tập con compact không đa cực K của đa tạp X và sử dụng nó, cùng với bất đẳng thức Bernstein-Markov để nghiên cứu các đa thức trực chuẩn. Đặc biệt, chúng tôi chứng minh rằng nếu K là tập compact L - chính qui, thì các đa thức trực chuẩn làm thành một cơ sở Schauder trong không gian các hàm chỉnh hình trên những miền mức con của hàm Green tương ứng.

Phần cuối cùng của chương này, chúng tôi trình bày việc sử dụng hàm đa phức Green với cực logarit đa trọng trên một đa tạp siêu lồi D để xây dựng hệ trực chuẩn Bergman trong không gian trọng Bergman nào đó. Sau đó chúng tôi chỉ ra rằng hệ Bergman này là một cơ sở Schauder thường trong không gian $O(D)$ và tất cả các không gian các hàm chỉnh hình trên những miền mức con của hàm Green tương ứng. Hơn nữa, chúng tôi chỉ ra rằng hệ trực chuẩn này cho một kết quả chính xác của phép xấp xỉ nội suy đối với các hàm chỉnh hình trên D. Đặc biệt, chúng tôi nhận được một sự mở rộng cho trường hợp đa phức về một kết quả cổ điển của Kadampata và Zahariuta.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

HÀM GREEN ĐA PHỨC

Trong chương này chúng ta sẽ định nghĩa hai dạng hàm Green đa phức và trình bày các tính chất quan trọng của chúng. Cụ thể là trình bày một vài kết quả về hàm Green đa phức trên không gian Stein và hàm Green đa phức trên đa tạp siêu lồi.

1.1. Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic

1.1.1. Định nghĩa. *Giả sử K là một tập con compact của $\mathbb{C}^N$. Hàm L - cực trị liên kết với K được định nghĩa bởi công thức sau:*

(1.1) $\quad l_K(z) = \log L_K(z) = \sup\{v(z); v \in \mathcal{L}, v/K \le 0\}, z \in \mathbb{C}^n,$

trong đó $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}^N\right)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới u trên $\mathbb{C}^N$, sao cho $\sup\left\{v(x) - \log|x| : x \in \mathbb{C}^{\infty}\right\} < +\infty$.

Hàm này được gọi là hàm L - cực trị Siciak-Zahariuta.

Bây giờ giả sử rằng X trong một đa tạp con giải tích bất khả qui của $\mathbb{C}^N$ có số chiều n và K là tập con compact không đa cực của X. Theo một Định lí của Sadulaev, sẽ được nghiên cứu chi tiết hơn trong phần 2.3, chúng ta có $L_K \in L^{\infty}_{loc}(X)$ nếu và chỉ nếu X là tập đại số.

Tất cả các không gian Stein được xét ở đây sẽ được giả thiết là bất khả qui. Những hàm đa điều hoà dưới trên một không gian phức đã được nghiên cứu và định nghĩa bởi J.P.Demailly ([Dm1]). Về định nghĩa của toán tử

Monge-Ampère phức trên những không gian phức chúng tôi đã đề cập tới trong ([Dm1]). Nguyên lí cực đại ở đây đã được đưa ra bởi E. Bedford trong ([Bd]). Chúng ta chỉ đề cập hai dạng của hàm đa điều hoà dưới được xác định trên một không gian giải tích phức.

1.1.2. Định nghĩa. *Hàm* $u : X \to [-\infty, +\infty]$ *gọi là đa điều hoà dưới trên không gian phức* X *nếu* u *là giới hạn địa phương của một hàm đa điều hoà dưới trong một phép nhúng địa phương của* X.

1.1.3. Định nghĩa. *Hàm u gọi là đa điều hoà dưới yếu trên* X *nếu nó là đa điều hoà dưới trên đa tạp phức của những điểm chính qui của* X *và bị chặn dưới trong một lân cận của mỗi điểm đơn.*

1.1.4. Định nghĩa. *Không gian Stein* X *được gọi là parabolic nếu nó có một dãy vét cạn các hàm đa điều hoà dưới liên tục* $g : X \to [-\infty, +\infty]$ *thoả mãn phương trình Monge-Ampère phức thuần nhất, trừ một vài tập con compact của* X *theo nghĩa dòng, nghĩa là tồn tại* $R_0 \geq -\infty$ *sao cho:*

(1.2) $$(dd^c g)^n = 0 \quad \text{trên} \quad \{x \in X; g(x) > R_0\}.$$

Một hàm như vậy sẽ được gọi là thế vị *parabolic* trên X .

Giả sử $E \subset X$, chúng ta kết hợp với E hàm cực trị sau:

(1.3) $$g_E(X) := \sup\{v(x); v \in \mathcal{L}(X, g), v/E \leq 0\}, \quad x \in X$$

Trong đó $\mathcal{L}(X, g)$ là ký hiệu lớp hàm đa điều hoà dưới v trên X , sao cho

$$\sup\{v(x) - g^+(x); x \in X\} < +\infty.$$

Với tập con mở khác rỗng cố định $U \subset X$, ta kết hợp mỗi tập con $E \subset X$, dung lượng của nó đối với U , được xác định bởi công thức :

(1.4) $$cap(E;U) = cap_g(E;U) = \exp\left(-\sup\{g_E(x); x \in U\}\right).$$