ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN XUÂN HÒA

NGUYÊN LÍ BIẾN PHÂN EKELAND VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - năm 2009

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN XUÂN HOÀ

NGUYÊN LÍ BIẾN PHÂN EKELAND VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. TRƯƠNG XUÂN ĐỨC HÀ

Thái Nguyên - năm 2009

Mục lục

Trang

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

LỜI NÓI ĐẦU

Trong giải tích, bài toán tìm điểm cực trị của hàm số có rất nhiều ứng dụng quan trọng. Một kết quả cổ điển chỉ ra rằng hàm f nửa liên tục dưới trên tập compact X thì sẽ đạt cực tiểu trên tập đó. Khi tập X không compact thì hàm f có thể không có điểm cực trị. Tuy vậy, với không gian mêtric đủ X, hàm f bị chặn dưới ta vẫn có thông tin về điểm xấp xỉ cực tiểu. Cụ thể là khi hàm f bị chặn dưới ta luôn tìm được điểm ε- xấp xỉ cực tiểu x_ε, tức là

$$\inf_X f \leq f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon.$$

Hơn nữa, vào năm 1974, I.Ekeland đã phát biểu nguyên lí nói rằng với hàm f nửa liên tục dưới, bị chặn dưới trên không gian mêtric đủ X thì với mọi điểm ε- xấp xỉ cực tiểu x_ε, ta luôn tìm được điểm $\bar{x}$ là cực tiểu chặt của hàm nhiễu của hàm ban đầu, đồng thời $f(\bar{x}) \leq f(x_\varepsilon)$. Không những thế, còn đánh giá được khoảng cách giữa $\bar{x}$ và x_ε.

Từ khi ra đời, nguyên lí biến phân Ekeland đã trở thành công cụ mạnh trong giải tích hiện đại. Những ứng dụng của nguyên lí này bao trùm nhiều lĩnh vực như: Lí thuyết tối ưu, giải tích không trơn, lí thuyết điều khiển, lí thuyết điểm bất động, kinh tế, . . .

Trong những năm gần đây, nguyên lí này đã được mở rộng cho trường hợp hàm f là ánh xạ đơn trị hoặc đa trị nhận giá trị trong không gian véc tơ.

Mục đích của Luận văn là tìm hiểu một số kết quả liên quan đến nguyên lí biến phân Ekeland (cổ điển và véc tơ) cùng một số ứng dụng của nguyên lí này, được giới thiệu trong các bài báo [2,5].

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1 gồm nguyên lí biến phân Ekeland cổ điển [2], dạng hình học của nguyên lí (định lí Bishop -Phelps, định lí giọt nước, định lí cánh hoa), một số ứng dụng của nguyên lí (định lí điểm bất động Banach, định lí điểm bất động

Caristi-Kirk,đạo hàm Gateaux).

Đây là các kết quả được giới thiệu trong bài báo của I.Ekeland [2] năm1974 và các bài báo của các tác giả khác [1,4]. Trong chương này chúng tôi cũng trình bày một cách chứng minh ngắn gọn nguyên lí biến phân Ekeland trong không gian hữu hạn chiều (sử dụng điều kiện bức), cách chứng minh này được giới thiệu trong bài giảng về lí thuyết tối ưu của Giáo sư Hoàng Tuỵ - Viện Toán học.

Chương 2 gồm nguyên lí biến phân Ekeland mở rộng cho ánh xạ nhận giá trị véc tơ, định lí Caristi - Kirk véc tơ, định lí Takahashi véc tơ, một số ví dụ minh hoạ và sự tương đương của ba định lí này. Đây là kết quả mới nhận được, được đăng trong bài báo của Y.Araya [5] năm 2008.

Nhân dịp này, Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến **PGS.TS. Trương Xuân Đức Hà** - cán bộ Viện Toán học - Viện Khoa học và Công nghệ quốc gia. Luận văn này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự chỉ bảo, hướng dẫn, sự giúp đỡ tận tình của cô.

Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong hội đồng phản biện, các thầy cô trong khoa Toán và khoa Sau đại học - ĐHSP Thái Nguyên, đã giúp đỡ em hoàn thiện luận văn này.

Xin cảm ơn Ban giám hiệu và các đồng nghiệp trường THPT Phú Bình đã luôn tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn gia đình và các bạn Phạm Hùng Linh, Vũ Quang Huy, Nguyễn Hữu Toàn, Hoàng Hữu Quý, Phạm Hồng Nam, đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 09 năm 2009

Học viên

Nguyễn Xuân Hoà

Chương 1 NGUYÊN LÍ BIẾN PHÂN EKELAND CỔ ĐIỂN

Trong chương này, chúng ta xem xét nguyên lí biến phân Ekeland cổ điển, dạng hình học của nguyên lí và một số ứng dụng của nguyên lí này.

1.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, chúng ta xét lớp hàm nửa liên tục dưới và một số tính chất của hàm này.

Cho X là không gian tôpô và hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Kí hiệu:

$$domf = \{x \in X \,|\, f(x) < +\infty\}.$$

$L_a f = \{x \in X \,|\, f(x) \le a\}$ là tập mức của f.

$epif = \{(x,a) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \le a\}$ là tập trên đồ thị của f.

Định nghĩa 1.1

Cho X là không gian tôpô. Hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là hàm nửa liên tục dưới tại x_0 khi và chỉ khi $\liminf_{x \to x_0} f(x) \ge f(x_0)$.

Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên X nếu f nửa liên tục dưới tại mọi điểm của X .

Nhận xét 1.1

Hàm f là nửa liên tục dưới tại x_0 khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U của x_0 sao cho $\forall x \in U$ ta đều có $f(x) \ge f(x_0) - \varepsilon$.

Ví dụ 1.1

Hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cho bởi:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & \text{nếu } x\neq 2\\ 0 & \text{nếu } x=2\end{cases}$$

Ta thấy:

$domf=\mathbb{R}$.

$L_1 f=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\le 1\}=[-1,1]$ là tập mức của hàm f.

$epif=\{(x,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid f(x)\le a\}$ là phần mặt phẳng nằm trên parabol có phương trình $f(x)=3x^2-2$ hợp với đoạn thẳng AB trong đó $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{B}(2,10)$ là tập trên đồ thị của f.

Dễ thấy rằng f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, gián đoạn tại $x=2$. Nhưng f là hàm nửa liên tục dưới tại $x=2$ vì $\liminf\limits_{x\to 2} f(x)=10\ge f(2)$. Do đó f là hàm nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.1.

Cho X *là không gian mêtric và hàm* $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, *khi đó các khẳng định sau là tương đương*:

(a) f *là hàm nửa liên tục dưới trên* X.

(b) $epif=\{(x,a)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)\le a\}$ *là tập đóng trong* $X\times\mathbb{R}$.

(c) $L_a f=\{x\in X\mid f(x)\le a\}$ *là tập đóng trong* X $(\forall a\in\mathbb{R})$.

Chứng minh

(a) $\Rightarrow$ ***(b).*** Giả sử f là hàm nửa liên tục dưới trên X. Ta lấy dãy $\{(x_n,a_n)\}\subset epif$ Sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,a_n)=(x_0,a_0)$. Ta cần chỉ ra $(x_0,a_0)\in epif$. Thật vậy,

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$ và hàm f là nửa liên tục dưới tại x_0 nên

$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$, mà dãy $\{(x_n, a_n)\} \subset epif$ nên $f(x_n) \leq a_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), nên

$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} a_n$. Do đó $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Điều này chứng tỏ $(x_0, a_0) \in epif$.

(b) $\Rightarrow$ ***(c).*** Giả sử epi f là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh mọi tập mức của f đều đóng trong X. Thật vậy, giả sử $L_a f = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ là tập mức bất kỳ của f. Lấy dãy $\{x_n\} \subset L_a f$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ do dãy $\{x_n\} \subset L_a f$ Nên $f(x_n) \leq a$ hay $(x_n, a) \in epif$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Hơn nữa, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ nên $\lim_{n\to\infty}(x_{n,} a) = (x_0, a)$. Mà $epif$ là tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$ nên $(x_0, a) \in \in epif$, do đó $x_0 \in L_a f$ ta có điều phải chứng minh.

(c) $\Rightarrow$ ***(a).*** Giả sử mọi tập mức của f đều đóng trong X. Ta cần chứng minh f là hàm nửa liên tục dưới trên f. Giả sử phản chứng f không là nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$. Khi đó có dãy $\{x_n\} \subset X$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_0)$. Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho có $k \in \mathbb{N}$ để $f(x_n) \leq f(x_0) - \varepsilon$ ($\forall n > k$). Xét tập mức $L = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x_{0)} - \varepsilon\}$ ta thấy $x_n \in L, \forall n > k$. Mặt khác do L đóng và $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ nên $x_0 \in L$, do đó $f(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon$ (vô lí). Vậy f là nửa liên tục dưới trên X. $\square$

Định nghĩa 1.2

Cho tập S trong không gian mêtric (X, d). Hàm chỉ của tập S là hàm:

$$l_S(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in S \\ +\infty & x \notin S \end{cases}$$

Ta có kết quả sau:

Mệnh đề 1.2.

Nếu S *là tập đóng thì* l_S *là hàm nửa liên tục dưới.*

Chứng minh

Khi $x_0 \in S$, từ định nghĩa hàm l_S ta có $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U của x_0 mà $l_S(x) \ge l_S(x_0) - \varepsilon, \forall x \in U$. Khi $x_0 \notin S$, vì S là tập đóng nên $d(x_0, S) > 0$. Chọn $r = \dfrac{d(x_0, S)}{2}, \forall x \in B(x_0, r)$ thì $x \notin S$. Do đó $l_S(x) \ge l_S(x_0) - \varepsilon, \forall x \in B(x_0, r)$. Ta có điều phải chứng minh. □

1.2. Nguyên lí biến phân Ekeland cổ điển

Trong mục này, chúng ta xem xét nguyên lí biến phân Ekeland cổ điển và xem xét nguyên lí này trong không gian hữu hạn chiều.

1.2.1. Nguyên lí biến phân Ekeland

Vấn đề chúng ta thường quan tâm là khi nào hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ đạt cực tiểu trên X, tức là $\exists \bar{x} \in X$ sao cho $f(x) \ge f(\bar{x}), \forall x \in X$. Trước hết, ta nhìn lại kết quả quen thuộc về sự tồn tại điểm cực tiểu của hàm f nửa liên tục dưới trên tập compact.

Mệnh đề 1.3.

Cho hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *là hàm nửa liên tục dưới trên tập* X *compact. Khi đó* f *đạt cực tiểu trên* X.

Chứng minh

Đặt $a = \inf\{ f(x) | x \in X\}$. Khi đó có một dãy $\{ x_n \} \subset X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Do X *compact*, để không mất tính tổng quát ta có thể coi $\{ x_n \}$ là dãy hội tụ đến

$\bar{x} \in X$. Ta sẽ chứng minh $f(\bar{x}) = a$. Thật vậy, do f là nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$ nên $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$. Kết hợp với $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ ta suy ra $f(\bar{x}) \leq a$ (điều đó chứng tỏ $a \neq -\infty$). Mặt khác theo định nghĩa của a ta có $f(\bar{x}) \geq a$. Vậy $f(\bar{x}) = a$ và $\bar{x}$ là điểm cực tiểu của hàm f trên X. □

Khi X không compact thì hàm f có thể không đạt cực tiểu.

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.2

Xét hàm số: $f : X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(2,1)\} \to \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 1)^2$$

Ta dễ dàng thấy rằng f liên tục trên X và $f(x) \geq 0,\ \forall x \in X$. Với bất kì $\varepsilon > 0$, ta có $x_\varepsilon = (2, 1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2})$ thoả mãn $f(x_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$ tức là ta có $\inf_X f = 0$. Tuy vậy không tồn tại $x \in X$ để $f(x) = 0$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì đưa tới $x_0 = (2,1) \notin X$. Vậy hàm f không đạt cực tiểu trên X.

Khi giả thiết compact của tập X không còn thì hàm f có thể không đạt cực trị. Khi đó, ta xét khái niệm điểm $\varepsilon -$ xấp xỉ cực tiểu như sau:

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, một điểm $x_\varepsilon \in X$ gọi là $\varepsilon -$ xấp xỉ cực tiểu của $f(x)$ trên X nếu

$$\inf_X f \leq f(x_\varepsilon) \leq \inf_X f + \varepsilon.$$

Điểm $\varepsilon -$ xấp xỉ cực tiểu bao giờ cũng tồn tại nếu f bị chặn dưới. Tuy nhiên, khi X là không gian mêtric đủ thì nguyên lí biến phân Ekeland phát biểu rằng ta có thể làm nhiễu hàm f để thu được một hàm đạt cực tiểu trên X. Sau đây ta xét nguyên lí biến phân Ekeland và một số phát biểu khác của nguyên lí này.