PHƯƠNG PHÁP RUNGE – KUTTA CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

Nguyễn Văn Minh*
Trường Đại học Kinh tế và Quản trị Kinh doanh – ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT
Cho một hệ phương trình vi phân đại số (DAEs) với hệ số biến thiên. Chuẩn logarit của ma trận cặp $(A(t),B(t))$ được xác định bởi $\|A(t)x(t)\|$.Khi phương pháp RK ổn định thì $\| A_{n+1}\ x_{n+1}\|$ không lớn hơn độ dài bước.Trong bài báo này chúng ta nghiên cứu một phương pháp Runge-Kutta.
Từ khóa:

Phương pháp Runge-Kutta
Chúng ta xét các hệ có hệ số biến đổi

$$A(t)x'(t)+B(t)x(t)=f(t) \qquad (1.1)$$

với ma trận $A(t)$ suy biến. Ký hiệu $A_{ni}=A(t_n+c_{ih}), B_{ni}=B(t_n+c_{ih})$ và $f_{ni}=f(t_n+c_{ih})$ việc tìm nghiệm của (1.1) bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta ẩn được đề xuất trong [2] là

$$x_{n+1}=x_n+h\sum_{i=1}^{s} b_i X'_{ni} \qquad (1.2)$$

Trong đó

$$A_{ni}X'_{ni}+B_{ni}X_{ni}=f_{ni}; X_{ni}=x_n+h\sum_{i=1}^{s} b_i X'_{ni} \qquad (1.3)$$

Cách tiếp cận khác
Để đưa ra cách tiếp cận mới cho các DAEs, chúng ta nhớ lại rằng nguồn gốc của công thức Runge-Kutta là công thức cầu phương chúng ta xét các giá trị c đối với $i\neq j$, $c_i\in[$ và các công thức cầu phương

$$\int \varphi(t)dt \approx \sum{}' b_i\varphi(c_i), \int \varphi(t)dt \approx \sum{}' a_{ij}\varphi(c_j) \qquad (2.1)$$

Chúng ta đưa ra một phương pháp

$$A_{n+1}x_{n+1}-A_nx_n+h\sum{}' b_i(B_{ni}-A'_{ni})X_{ni}=h\sum{}' b_if_{ni} \qquad (2.2)$$

với là nghiệm của

$$A_{ni}X_{ni}-A_nx_n+h\sum{}' a_{ij}(B_{nj}-A'_{nj})X_{nj}=h\sum{}' a_{ij}f_{nj}, i=1,\dots,s. \quad (2.3)$$

Biểu thức $A_{n+1}x_{n+1}$ là giá trị gần đúng của $A(t_{n+1})x(t_{n+1})$.

Ví dụ 1. Cho hệ DAE

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & t\end{pmatrix}x'(t)+\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}x(t)=f(t).$$

Chùm $(A,B-A')$ chính quy (không suy biến) nhưng chùm (A,B) suy biến.

Chùm $(A,B-$ chính quy có chỉ số 1 nếu và chỉ nếu chùm $(A,B-$ chính quy với chỉ số 1

Sự hội tụ cho hệ DAEs có hệ số hằng

Trong [4], đối với một phương pháp BDF bước

$$\sum{}' \alpha_{kj}x_{n-j}=hf_n$$

các phương pháp bước cải biên được định nghĩa cho các DAE hệ số biến đổi tuyến tính (1.1) là

$$[\alpha_{k0}A_n+h(B_n-A'_n)]x_n+\sum{}' \alpha_{kj}A_{n-j}x_{n-j}=hf_n$$

Và do đó, phương pháp được đề xuất cho phương pháp Euler ẩn (BDF1) trùng hợp với cách tiếp cận mới cho các phương pháp Runge-Kutta với $\bar{x}_{n+1}=$ được thực hiện trong bài báo này. Sựhội tụ được nghiên cứu cho các DAE có thể chuyển sang hệ số hằng, tức là đối với các DAE tồn tại một khả vi không suy biến sao cho phép biến đổi $x=L$ chuyển (1.1) sang một hệ hệ số hằng có thể giải được. Các hệ như thế được đặc trưng bởi định lý sau đây.

Định lý 3.1. *Hệ* (1.1) *có thể biến đổi sang các hệ số hằng khi và chỉ khi thỏa mãn hai điều kiện sau đây:*

* *Tel: 0912 119767, Email: nvminh1954@gmail.com*

a) $sA + B$ · khả nghịch trên I đối với s nào đó, và

b) $A(sA + B -$ Akhông đổi trên I.

Nếu a) và b) đúng, chúng ta có thể chọn $L(t) = (sA + B' - A$để thu được hệ $Cy'(t) + (I - sC)y(t) =$; trong đó $C =$

Vì vậy, nếu chúng ta kí hiệu $y_n = L_n^{-1}x_n, Y_{ni} = L_{ni}^{-1}$ và tính đến $B - A' = (I - sC$ cho các hệ có thể chuyển được (2.2) và (2.3) là

$$Cy_{n+1} - Cy_n + h\sum b_i(I - sC)Y_{ni} = h\sum b_i f_{ni} \qquad (3.1)$$

với là nghiệm của

$$Cy_{ni} - Cy_n + h\sum a_{ij}(I - sC)Y_{ni} = h\sum a_{ij} f_{nj}, \quad i = 1, \dots, s. \qquad (3.2)$$

Tương ứng với việc lấy tích phân của DAE hệ số hằng tuyến tính

$$Cy'(t) + (I - sC)y(t) = f(t)$$

với phương pháp mới. Trong trường hợp này, chúng ta thấy rằng nghiệm thu được trong (3.1) phù hợp với (3.2). Đối với trường hợp chỉ số 1, các DAE hệ số hằng được chuyển đổi cũng có chỉ số 1. Nếu chúng ta tìm gần đúng số (nghiệm gần đúng bằng phương pháp số) qua (14) và (13) quả thực

$$x(t_{n+1}) - \bar{x}_{n+1} = \left(A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1}\right)^{-1}\left[A_{n+1}x(t_{n+1}) - A_{n+1}x_{n+1}\right]$$
$$\times \left(A_{n+1} + B_{n+1}Q_{s,n+1}\right)^{-1}\left[Cy(t_{n+1}) - Cy_{n+1}\right] \qquad (3.3)$$

Đối với bất kỳ DAE nào, nếu chúng ta tìm được gần đúng số qua $\bar{x}_{n+1} =$, ta có

$$x(t_{n+1}) - \bar{x}_{n+1} = L(t_{n+1})[y(t_{n+1}) - Y_s] \qquad (3.4)$$

Chúng ta nghiên cứu bậc hội tụ cho các phương pháp mới áp dụng cho các DAE có thể chuyển sang hệ số hằng. Đối với chùm (A, B) chỉ số v dạng chuẩn tắc Kronecker là $PAQ = diag(I, N), PBQ = diag(C, I)$ trong đó P và Q là các ma trận chính quy, và N là lũy linh với bậc lũy linh là v. Nếu chúng ta nhân với P và thực hiện phép đổi biến $x = Q(y^t, z^t)^t$ chúng ta tách DAE tuyến tính hệ số hằng. Dạng chuẩn tắc Kronecker chophép chúng ta tách (2.2) và (2.3) để thu được y_n là nghiệm số cho ODE $y(t)' + Cy(t) = f(t)$. Vì vậy, nếu phương pháp có bậc p đối với các ODE, chúng ta có $y_n - y(t_n) = v(h^p)$.

Nếu DAE có chỉ số 1 và có thể chuyển sang hệ số hằng, DAE mới cũng có chỉ số 1. Trong các đề xuất sau đây, chúng ta đưa ra bậc sai số $Cy(t_n) -$ trong (3.3).

Định lý 3.2. *Xét một DAE hệ số hằng tuyến tính với chỉ số v Nếu phương pháp Runge-Kutta có bậc đối các ODEs thì nghiệm số thu được với phương pháp mới thỏa mãn* $Ax(t_n) - A\bar{x}_n = v(h^{kd})$.

Chứng minh. Đối với bài toán chỉ số 1, chúng ta có, đối với ma trận chính quy cho chúng ta dạng chuẩn tắc Kronecker

$$Ax(t_{n+1}) - Ax_{n+1} = P\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ z(t \quad) - z \end{pmatrix}$$
$$= P\begin{pmatrix} y(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} = v(h^p). \qquad \blacksquare$$

Từ đề xuất này và (3.3), chúng ta phát biểu định lý sau đây.

Định lý 3.3. *Xét một DAE chỉ số 1 tuyến tính có thể chuyển sang hệ số hằng. Nếu phương pháp Runge-Kutta có bậc đối với các ODE, thì nghiệm số thu được với phương pháp mới qua phép chiếu (2.68) và (2.67) thỏa mãn* $x(t_n) - \bar{x}_n = v(h^{kd})$.

Đối với các DAE chỉ số cao có thể chuyển sang hệ số hằng, chúng ta có kết quả sau.

Định lý 3.4. *Xét một DAE (1.1) có thể chuyển sang DAE hệ số hằng với chỉ số 1. Nếu phương pháp có bậc đối với các ODE, thì giá trị gần đúng tính bằng phương pháp số mới $\bar{x}_{n+1} =$ cho thấy rằng $x(t_{n+1}) - X_s = v($ với*

$K_v = \min(p, K_{a,i} - i + 2)$

và là số nguyên lớn nhất sao cho

$b^t A^{-i} e = \frac{b^t A^{-i} c^{\cdot}}{(i \dots)}, \quad i = 1,2,\dots,l-1;$

$b^t A^{-i} c^i = i(i-1)\dots(i = l+2), \quad i =$

Sự co

Như đã được chỉ ra ở mục 1, mục tiêu của chúng ta là đưa ra những phương pháp tiếp cận mới để duy trì tính chất co của nghiệm số, và tương tự đối với nghiệm chính xác.Với cách tiếp cận mới được đưa ra trong bài báo này, điều đó có thể được chứng minh dễ dàng.

Định lý 4.1. *Xét DAE thuần nhất (1.1) và giá trị gần đúng $A_{n+1}x_{n+1}$ thu được qua (2.2) và* (2.3). *Nếu phương pháp Runge-Kutta ổn định đại số, và $x_{ni} \in V_{ni}$là một không gian con sao cho*

$\mu V[A_{ni}, B_{ni} - A'_{ni}] \le 0$

thì

$\|A_{n+1}x_{n+1}\| \le \|A_n X_n\|$.

Chứng minh.Nếu kí hiệu

$W_{ni} = h(B_{ni} - A'_{ni})X_{ni}, M = BA + A^tB - bb^t, m_{i,j}$

là các yếu tố (i, j)của M, và theo định lý 4.2.2 [5] chúng ta nhận được

$$\|A_{n+1}x_{n+1}\|^2 = \|A_n x_n\|^2 + 2\left(A_n x_n, \sum_{i=1}^{s} b_i W_{ni}\right) + \left(\sum_{k=1}^{s} b_k W_{nk}, \sum_{i=1}^{s} b_i W_{ni}\right)$$

$$= \|A_n x_n\|^2 - \sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}(W_{ni}, W_{nj}) + 2h\sum_{i=1}^{s} b_i (A_{ni}X_{ni}, -(B_{ni} - A'_{ni})X_{ni})$$

$$\le |A_n x_n|^2 - \sum_{i,j=1}^{s} m_{ij}(W_{ni}, W_{nj}) + 2h\sum_{i=1}^{s} b_i \mu v_i [A_{ni}, B_{ni} - A'_{ni}] \|A_{ni}x_{ni}\|^2$$

$$\le \|A_n x_n\|. \qquad \blacksquare$$

Tính toán song song cho hệ DAE

Phát biểu phương pháp song song

Giả sử có hai vecter là c=($c_1, c_2, \dots c_s$) và

$C = (C_1, \dots, C_s, C_{s+1}, \dots, C_{2s})^T = (C_1, \dots C_s, 1 + C_1, \dots, 1 + C_s)^T,$

với **c** là vector trùng khớp Gauss-Legendre s-chiều. Khi đó ta có phương pháp RK:\\

$$X_{n,i} = u_n + h\sum_{j=1}^{2s} a_{ij} g(t_n + \bar{c}_j h, X_{n,j}), i = 1..2s \tag{3.5.12}$$

$$u_{n+1} = u_n + h\sum_{j=1}^{2s} c_j g(t_n + \bar{c}_j h, X_{n,j}) \tag{3.5.13}$$

Với

$g(t, X) = f(t) - B(t)X(t)$

$A = PR^{-1}, b = gR^{-1}$

Với

$$P = \left(\frac{c_i^j}{j}\right); i, j = 1..2s; \quad R = (c_i^{j-1}); g = \left(\frac{1}{i}\right), i, j = 1..s$$

Định nghĩa 5.1 Giả sử $u_n = x(t_n)$, khi đó phương pháp hiệu chỉnh (3.1.1) được gọi là có cấp chính xác bước là *p* và có cấp chính xác nấc là *q*, nếu $u_n - x(t_n) = O(h^{p+1})$ và $x(t_n + \bar{c}_i h) - X_{n,i} = O(h^{q+1})$

Từ đó ta có lược đồ tính toán song song RK sau đây:

$$X_{n,i}^{(0)} = x_n + h\sum_{j=1}^{2s} v_{ij} g(t_{n-1} + \bar{c}_j h, X_{n-1,j}^{(m)}), i = 1...2s \tag{3.5.14a}$$

$$X_{n,i}^{(m)} = x_n + h\sum_{j=1}^{2s} a_{ij} g(t_n + \bar{c}_j h, X_{n,j}^{(k-1)}), i = 1...2s; j = 1..m \tag{3.5.14b}$$

$$x_{n+1} = x_n + h\sum_{j=1}^{2s} b_j g(t_n + \bar{c}_j h, X_{n,j}), \tag{3.5.14c}$$

ở đây m là số lần lặp. Ma trận V=(v_{ij}) được xác định theo điều kiện bậc

$$x(t_n + \bar{c}_i h) - y(t_n) - h\sum_{j=1}^{2s} v_{ij} x(t_n + (\bar{c}_j - 1)h) = O(h^{2s+1})$$

Hoạt động của (3.5.14) như sau:

Giả sử y_n và $X_{n-1}^{(m)}$ đã tính được từ bước trước, từ (3.5.14a) ta tính được $X_{n,i}^{(0)}$; thay vào (3.5.14b) và lặp theo k từ 1 đến m ta được $X_{n,j}^{(m)}$, từ đó tính được x_{n+1}

Bậc hội tụ. Trước tiên ta xét bậc hội tụ cho (3.5.14a)

Định lý 5.1.Tồn tại ma trận V = (vij) sao cho (3.5.14a) có bậc 2s, tức là

$$X_{n,i} - X_{n,i}^{(0)} = O(h^{2s+1}), i = 1..2s$$

Chứng minh. Trong (3.5.14a) ta thay

$X_{n,i}^{(m)}, x_i, X_{n-1}^{(m)}$ bởi giá trị đúng của chúng là

$x(t_n + \bar{c}_i h), x(t_n), x(t_{n-1} + \bar{c}_i h) = x(t_n + (\bar{c}_j - 1)h)$,

ta nhận được:

$$x(t_n + \bar{c}_i h) - x(t_n) - h\sum_{j=1}^{2s} v_{ij} x'(t_n + (\bar{c}j - 1)h) = O(h^{2s+1}), i = 1..2s \qquad (3.5.15)$$

Khai triển Taylor tại lân cận điểm t_n, ta nhận được:

$$\frac{(\bar{c}_i)^j}{l} = \sum_{i=1}^{2s} v_{ij} (\bar{c}_j - 1)^{l-1}, \quad i = 1..2s; \quad l = 1..2s$$

Hay là dưới dạng tương đương:

$$\frac{(\mathrm{c}_i)^l}{l} = V(\bar{\mathrm{c}} - 2\mathrm{e})^{l-1}, \qquad l = 1..2s$$

Từ đó, ta nhận được các biểu thức dưới dạng vector

$$P = VQ, \quad P = (p_{\mathrm{ij}}) = (\frac{\bar{c}_i^{\,j}}{j}), Q = (q_{\mathrm{ij}}) = ((\bar{c}_i - 1)^{j-1})$$

Vì $\bar{c}_i, i = 1...2s$ là khác nhau từng đôi một, nên ma trận Q khả nghịch, do đó tồn tại ma trận $Q = PQ^{-1}$, và định lý được chứng minh.

Suất hội tụ

Với phương pháp dạng RK hiển, suất hội tụ được xác định bởi phương trình thử $x'(t) = \lambda x(t)$ với λ chạy trên phổ của ma trận jacobi $\partial \mathrm{g} / \partial \mathrm{x}$. Áp dụng (3.14b) vào phương trình thử:

$$\mathrm{X}_n^{(j)} - \mathrm{X}_n = zA[\mathrm{Y}_n^{(j-1)} \text{-} \mathrm{Y}_n], \quad \mathrm{z} = \lambda\mathrm{h},\ \mathrm{j} = 1..\mathrm{m}$$

Suất hội tụ được xác định bởi bán kính phổ $\rho(zA)$, để phép lặp hội tụ, bán kính phổ phải thỏa mãn điều kiện $\rho(zA) < 1$, từ đó suy ra điều kiện hội tụ:

TBTPIRK, miền hội tụ S_{conv} được xác định bởi $S = \{\mathrm{z}:\mathrm{z} \in C, |z| < 1/\rho(A)\}$

Miền ổn định

Ổn định tuyến tính của phương pháp TBTRK cũng được xác định từ phương trình thử $x'(t) = \lambda x(t)$ với λ chạy trên nửa mặt phẳng trái, ta sử dụng công thức dự báo dạng

$$\mathrm{X}_n^{(0)} = \mathrm{e}x_n + zVX_{n-1}^{(m)}$$

Với $z = \lambda h$, sau khi có $X_n^{(0)}$ áp dụng vào (3.14b) và (3.14c) ta được:

$$X_n^{(m)} = \mathrm{e}y_n + \mathrm{zA}X_n^{(m-1)} = z^{m+1}A^m V X_{n-1}^{(m)} + [1 + \mathrm{z}b^T(1 + \mathrm{zA} + ...(\mathrm{zA})^m)\mathrm{e}]\mathrm{x}_n$$

$$x_{n+1} = z^{m+2} b^T A^m V X_{n-1}^{(m)} + \{1 + \mathrm{z}b^T[\mathrm{I} + \mathrm{zA} + ... + (\mathrm{zA})^m]\mathrm{e}\}\mathrm{x}_n$$

Hay là viết lại dưới dạng ma trận, ta được:

$$\begin{pmatrix} X_n^{(m)} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = M_m(z) \begin{pmatrix} X_{n-1}^{(m)} \\ x_n \end{pmatrix}$$

ở đây,

$$M_m(z) = \begin{pmatrix} z^{m+1} A^m V & [\mathrm{I} + \mathrm{zA} + .. + (\mathrm{zA})^m] e \\ z^{m+2} b^T A^m V & 1 + z b^T [\mathrm{I} + \mathrm{zA} + .. + (\mathrm{zA})^m] e \end{pmatrix}$$

và được gọi là ma trận ổn định.

Miền ổn định được xác định bởi:

$$S_{stab}(m) = \{\mathrm{z}:\rho(\mathrm{M}_m(\mathrm{z})) < 1, \mathrm{Re(z)} < 0\}$$

Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã trình bày phương pháp RK cho hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1, tuyến tính. Đã nêu phương pháp song song, chỉ ra miền hội tụ và miền ổn định của phương pháp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số*, Nxb Đại học quốc gia Hà Nội, 1996.

[2]. K.E. Brenan, L.R. Petzold, *The numerical solution ò higher index differential – algebraic equation by impicit Runge-kutta methods*, SIAMj. Numer. Anal, 26(1989) 976-996.

[3]. Nguyen Huu Cong and Nguyen Thu Thuy, Two-step-by-two step type PC methods based on Gauss-Legendre collocation point, Computational and Applied Mathematics 236(2011) 225-233

[4]. Steffen Schulz, *Four Lectures on Differential – Algebraic Equations*, Humboldt Universitat zu Berlin.

[5]. Dr. Abebe Geletu, *Introduction to Differential – Algebraic Equations*, Winter Semester 2011.

[6]. Inmaculada Higueras, Berta Garcia – Celayeta,*Runge – Kutta methods for DAEs. A New approach.*

SUMMARY

RUNGE - KUTTA METHOD FOR ALGEBRAIC EQUATIONS SYSTEM

Nguyen Van Minh*

College of Economics and Business Administration – TNU

Given a linear variable coeffcient DAE, the logarithmic norm of a pencil related to the original pencil (A(t);B(t)), allows us to determine the contractivity of $\|A(t)x(t)\|$. When stable Runge–Kutta methods are used for DAEs, the contractivity for $\| A_{n+1} x_{n+1}\|$ is no longer maintained for all stepsize. In this paper we define for Runge–Kutta methods.

Keywords: *Differential algebraic system; Runge–Kutta methods; Logarithmic norm; linear variable coeffcient; B-stability*.

Ngày nhận bài: 13/11/2012, ngày phản biện:11/12/2012, ngày duyệt đăng: 26/3/2013

* *Tel: 0912 119767, Email: nvminh1954@gmail.com*