ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRỊNH XUÂN BÁCH

KHẮC PHỤC HIỆN TƯỢNG SUY BIẾN TRONG BÀI TOÁN VẬN TẢI

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS.TS Trần Vũ Thiệu (Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 5 $(2011-2013)$ đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 01 năm 2013.

Người viết Luận văn

Trịnh Xuân Bách

Mở đầu

Tối ưu hoá (Optimization) là một môn toán học ứng dụng đã và đang được nghiên cứu, giảng dạy và học tập ở rất nhiều trường đại học, cao đẳng trong nước cho sinh viên các ngành toán học, tin học, kinh tế và kĩ thuật. Trong các bài toán tối ưu thì quan trọng nhất và đáng chú ý nhất là các bài toán tối ưu tuyến tính. Qui hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đơn giản nhất, được ứng dụng rộng rãi nhất trong nhiều lĩnh vực khác nhau của kinh tế, đời sống và quốc phòng. Chính vì vậy đây cũng là bài toán được nghiên cứu đầy đủ và hoàn chỉnh nhất, cả về mặt lí thuyết và tính toán, cũng đã có nhiều sách và giáo trình viết về vấn đề này, ở đây tôi xin trình bày một phần nhỏ của bài toán tối ưu.

Bài toán vận tải (Transportation Problem) của qui hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu được ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn. Trong bài toán này hàm mục tiêu là tuyến tính (nghĩa là chi phí vận chuyển tỉ lê thuận với lượng hàng vận chuyển) và các ràng buộc của bài toán có dạng đặc biệt. Nhờ khai thác cấu trúc đặc biệt này, người ta đã đề ra các phương pháp riêng, hiệu quả hơn hẳn so với việc áp dụng phương pháp đơn hình tổng quát vào bài toán. Đáng chú ý là phương pháp thế vị (xem [1]), phương pháp qui không chọn ô (xem [2]), phương pháp thu hẹp chính tắc,...

Mô hình toán học của bài toán vận tải có dạng một bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc:

$$\min\left\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\right\}$$

với $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ cho trước. Ta thường giả thiết $rank\,(\mathrm{A}) = m$ và $m \leq n$. Với bài toán này, các phương án cực biên (còn gọi là lời giải cơ sở) thường hay "suy biến", tức là có số thành phần dương nhỏ hơn

m. Suy biến có thể dẫn đến hiện tượng xoay vòng, khi giải bài toán theo thuật toán đơn hình, hậu quả là quá trình giải không thể kết thúc. Để tránh gặp xoay vòng, người ta đã đề ra nhiều biện pháp khắc phục khác nhau. Chẳng hạn, khi giải qui hoạch tuyến tính theo thuật toán đơn hình người ta thường áp dụng qui tắc từ vựng, qui tắc Wolfe, qui tắc Bland hay qui tắc cột phụ Srishna, ... (xem[3]).

Bài toán vận tải tuyến tính có dạng một qui hoạch tuyến tính chính tắc, vì thế nó cũng thường gặp hiện tượng suy biến và do đó nguy cơ xoay vòng cũng có thể xảy ra, khi giải bài toán theo qui luật thế vị. Mặc dù thực tế giải bài toán cho thấy xoay vòng trong bài toán vận tải rất hiếm khi xảy ra. Tuy nhiên, về lý thuyết nghiên cứu hiện tượng xoay vòng và tìm cách khắc phục nó là một việc làm cần thiết và có ích. Đối với bài toán vận tải vấn đề khắc phục suy biến và xoay vòng đơn giản hơn nhiều so với bài toán qui hoạch tuyến tính tổng quát.

Luận văn này nhằm mục đích tìm hiểu và giới thiệu nội dung và phương pháp giải bài toán vận tải với hàm mục tiêu tuyến tính: nêu mô hình và các tính chất cơ bản của bài toán, giới thiệu thuật toán thế vị giải bài toán. Vấn đề đối ngẫu và quan hệ đối ngẫu trong bài toán vận tải cũng được đề cập tới. Luận văn còn đề cập tới bài toán vận tải suy biến, hiện tượng xoay vòng và phương pháp khắc phục xoay vòng trong bài toán vận tải. Luận văn bao gồm lời nói đầu, hai chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo:

Chương 1 với tiêu đề "Bài toán vận tải tuyến tính" trình bày nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán vận tải tuyến tính. Tiếp đó, đề cập tới phương pháp tìm phương án cực biên ban đầu của bài toán. Sau đó, trình bày cơ sở lý luận và nội dung thuật toán thế vị (một biến thể của thuật toán đơn hình) giải bài toán vận tải. Cuối chương, nêu ra ví dụ số để minh họa cho thuật toán giải đã trình bày.

Chương 2 với tiêu đề "Bài toán vận tải suy biến và cách khắc phục" trình bày bài toán vận tải suy biến và ví dụ dẫn đến xoay vòng trong bài toán vận tải. Sau đó, để khắc phục xoay vòng ta xét bài toán nhiễu, tức là bài toán với số liệu đầu vào thay đổi đôi chút so với các số liệu ban đầu.

Chứng minh mọi phương án cực biên trong bài toán nhiễu đều không suy biến, do đó không xảy ra hiện tượng xoay vòng khi giải nó theo thuật toán thế vị.

Chương 1

Bài toán vận tải tuyến tính

Chương này đề cập tới bài toán vận tải tuyến tính (chi phí vận chuyển tỉ lệ thuận với lượng hàng vận chuyển), đó là dạng bài toán qui hoạch tuyến tính đơn giản nhất và được ứng dụng rộng rãi nhất trong thực tiễn. Phần đầu của chương trình bày nội dung và các tính chất cơ bản của bài toán. Tiếp đó đề cập tới phương pháp tìm phương án cực biên ban đầu của bài toán. Sau đó trình bày cơ sở lý luận và nội dung thuật toán thế vị (một biến thể của thuật toán đơn hình) giải bài toán vận tải. Cuối chương nêu ví dụ số minh họa cho thuật toán giải. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 Bài toán và tính chất

Bài toán vận tải có nội dung như sau: Giả sử có m kho chứa một loại hàng (xi măng chẳng hạn) $K_1, ..., K_m$ (gọi là các điểm phát), kho $i = 1, ..., m$ có $a_i > 0$ đơn vị hàng. Cần vận chuyển số hàng này tới n hộ tiêu thụ $H_1, ..., H_n$ (gọi là các điểm thu), hộ $j = 1, ..., n$ cần $b_j > 0$ đơn vị hàng. Cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát K_i tới điểm thu H_j là $c_{ij} \geq 0$. Vấn đề đặt ra là cần vận chuyển từ mỗi điểm phát tới mỗi điểm thu bao nhiêu đơn vị hàng sao cho thỏa mãn nhu cầu của mọi điểm thu và tổng chi phí vận chuyển toàn bộ số hàng là nhỏ nhất?
Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ điểm phát i tới điểm thu j.

Khi đó mô hình toán học của bài toán vận tải có dạng như sau:

$$f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \quad \text{(cực tiểu tổng chi phí vận chuyển)} \quad (1.1)$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, ..., m \text{ (mọi điểm phát giao hết hàng)}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, ..., n \quad \text{(mọi điểm thu nhận đủ hàng)}, \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n \quad \text{(lượng hàng vận chuyển không âm)}. \quad (1.4)$$

Ở đây, m là số kho chứa hàng (điểm phát),
n là số nơi tiêu thụ hàng (điểm thu),
a_i là lượng hàng có (cung) ở điểm phát i ($i = 1, 2, ..., m$),
b_j là lượng hàng cần (cầu) ở điểm thu j ($j = 1, 2, ...n$),
c_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i tới điểm thu j,
x_{ij} biểu thị lượng hàng vận chuyển cần tìm từ điểm phát i tới điểm thu j.

Điều kiện cần và đủ để bài toán (1.1)-(1.4) giải được là phải có điều kiện cân bằng thu phát, nghĩa là tổng cung bằng tổng cầu:

$$\alpha_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n. \quad (1.5)$$

Bài toán vận tải (1.1)-(1.4) là một dạng đặc biệt của qui hoạch tuyến tính. Để thấy rõ điều này ta sắp xếp các biến số theo thứ tự

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}$$

và viết lại hệ ràng buộc chính (1.2)-(1.3) dưới dạng hệ $m + n$ phương trình của $m \times n$ biến số x_{ij} như sau:

$$\begin{cases} x_{11} + ... + x_{1n} & & & & = & a_1 \\ & x_{21} + ... + x_{2n} & & & = & a_2 \\ & & ...... & & & \\ & & & x_{m1} + ... + x_{mn} & = & a_m \\ x_{11} & +x_{21} & ...... & +x_{11} & = & b_1 \\ \;\; x_{12} & \;\; +x_{22} & ...... & & = & b_2 \\ \;\;\; ... & \;\;\; ... & ...... \;\; ... & & & ... \\ \;\;\;\; x_{1n} & \;\;\;\; +x_{21} & ...... & + x_{mn} & = & b_n \end{cases}$$

Ký hiệu A là ma trận hệ số của hệ phương trình trên ($m + n$ hàng và $m \times n$ cột),
$x = (x_{11}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn})^T$-véctơ cột $m \times n$ thành phần,
$c = (c_{11}, ..., c_{1n}, x_{21}, ..., c_{2n}, ..., c_{m1}, ..., c_{mn})^T$-véctơ cột $m \times n$ thành phần,
$b = (a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n)^T$ -véctơ cột vế phải ($m + n$ thành phần).
Bài toán vận tải (1.1)-(1.4) được viết lại thành bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

$$f = \langle c, x \rangle \to \min, \tag{1.6}$$

$$Ax = b, x \geq 0. \tag{1.7}$$

Ta gọi A_{ij} là véctơ cột của ma trận A tương ứng với biến x_{ij}. Dễ thấy véctơ này có hai thành phần bằng 1 tại dòng thứ i và dòng thứ $m + j$, còn các thành phần khác bằng 0.

Véctơ x thỏa mãn (1.2)-(1.4) gọi là một *phương án* của bài toán vận tải. Một *phương án* đạt cực tiểu (1.1) gọi là *phương án tối ưu* hay *lời giải.* Phương án x là phương án cực biên khi và chỉ khi các véctơ cột A_{ij} của ma trận A tương ứng với các $x_{ij} > 0$ là độc lập tuyến tính. Sau đây ta sẽ giả thiết điều kiện cân bằng thu phát (1.5).

Do bài toán vận tải có $m + n$ ràng buộc chính, nên ta nghĩ rằng mỗi phương án cực biên cũng có $m + n$ thành phần dương, nhưng thực tế nó chỉ có nhiều nhất $m + n - 1$ thành phần dương, vì trong số các ràng buộc này có một ràng buộc là thừa (có thể bỏ đi mà không làm ảnh hưởng tới lời giải của bài toán). Một phương án cực biên của bài toán gọi là *không suy biến* nếu số phần tử của tập hợp $G = \{(j; j) : x_{ij} > 0\}$ bằng $m+n-1$, gọi là *suy biến* nếu số phần tử của tập hợp G nhỏ hơn $m + n - 1$.

Với điều kiện (1.5) bài toán vận tải (1.1)-(1.4) có các tính chất sau đây:

1. Bài toán luôn có phương án và tập hợp các phương án của bài toán là giới nội.

2. Một trong các ràng buộc (1.2)-(1.3) là thừa và hạng của hệ ràng buộc này bằng $m + n - 1$.

3. Nếu các lượng cung và cầu a_i, b_j là các số nguyên thì bài toán sẽ có lời giải nguyên.

Có thể dùng các phương pháp của qui hoạch tuyến tính để giải bài toán vận tải. Tuy nhiên do bài toán này có dạng đặc biệt nên người ta đã đề ra nhiều thuật toán giải hiệu quả. Một trong số đó là thuật toán thế vị. Thuật toán này được ta xem xét ở phần sau.

Thông thường khi giải bài toán vận tải ta ghi lại dữ liệu của bài toán dưới dạng một bảng chữ nhật, gọi là *bảng vận tải* (Bảng 1.1).

Bảng 1.1. *Bảng vận tải*

Thu / Phát	b_1	...	b_j	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
a_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮
a_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Hình 1.1:

Trong đó $c = (c_{11}, ..., c_{1n}, x_{21}, ..., c_{2n}, ..., c_{m1}, ..., c_{mn})^T$ là véctơ hệ số mục tiêu của bài toán vận tải. Bảng gồm m hàng $(i = 1, 2, ..., m)$ và n cột $j = (1, 2, ..., n)$. Chỗ giao nhau ở hàng i, cột j kí hiệu là ô $(i; j)$. Mỗi