ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ THỊ LAN HƯƠNG

TÍNH CHÍNH QUI CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ THỊ LAN HƯƠNG

TÍNH CHÍNH QUI CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI NHIỀU CỰC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Đỗ Thị Lan Hương

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn tận tình, hiệu quả với những kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Kháng Nhật - Tuyên Quang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Đỗ Thị Lan Hương

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Hàm Green đa phức đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết thế vị phức, nó đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu như: Siciak, Zaharjuta, Lelong, Klimek, Zeriahi, Dan Coman,...và đạt được nhiều kết quả sâu sắc về hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình. Đó là sự tổng quát hoá kết quả của Siciak - Zaharjuta trong $\mathbb{C}^n$ và trong trường hợp đại số. Một số kết quả về hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi, đó là sự tổng quát hoá của hàm Green đa phức với cực hữu hạn, đã được nghiên cứu bởi Lelong, Klimek, Demailly, Zaharjuta, E. Amar, P.J. Thomas, Dan Coman,...

Tuy nhiên những cấu trúc của hàm Green đa phức với nhiều cực vẫn còn được biết rất ít. Ở đây chúng tôi chọn đề tài "*Tính chính qui của hàm Green đa phức với nhiều cực*". Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực, từ đó nghiên cứu tính chính qui của hàm Green đa phức với nhiều cực. Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu tính chính qui của hàm Green đa phức với một cực và nhiều cực.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực.

- Trình bày một số kết quả của Z. Blocki năm 2001 về tính chính quy của hàm Green đa phức với nhiều cực.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

- Sử dụng phương pháp và kết quả của Zbigniew Blocki.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 37 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, hàm cực trị tương đối, tính $C^{1,1}$ - chính qui của hàm Green đa phức với một cực.

Chương 2 và phần 1.4 của chương 1 là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về tính chính quy của hàm Green đa phức với nhiều cực.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

TÍNH $C^{1,1}$ - CHÍNH QUY CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC VỚI MỘT CỰC

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a \in \Omega$ *và* $b \in \mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần liên thông của tập hợp* $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$. Trong trường hợp đó, ta viết $u \in PSH(\Omega)$ (ở đây $PSH(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới trong Ω).

Tính đa điều hoà dưới có thể được đặc trưng dưới dạng đạo hàm suy rộng (hay theo nghĩa phân bố).

Nhắc lại, nếu $u \in C^2(\Omega)$, $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^n$ thì $4\langle Lu(a)b, b\rangle = \Delta_\lambda (u(a + \lambda b))\big|_{\lambda = 0}$.

Ta có định lý sau:

1.1.2. Định lý. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là tập mở và* $u \in PSH(\Omega)$. *Khi đó với mọi* $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ *ta có*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0$$

tại mọi $z \in \Omega$ *theo nghĩa suy rộng, tức là với mọi hàm không âm* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(z) \langle L\varphi(z)b, b\rangle d\lambda(z) \geq 0$$

Ngược lại, nếu $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *sao cho với mọi* $z \in \Omega$, *mọi* $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0 \qquad (1.1)$$

theo nghĩa suy rộng thì hàm $u = \lim_{\varepsilon \to 0}(v * \chi_\varepsilon)$ *là hàm đa điều hoà dưới trong* Ω *và bằng* v *hầu khắp nơi trong* Ω.

Chứng minh. Cho $u \in PSH(\Omega)$ và $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$ với $\varepsilon > 0$. Lấy một hàm không âm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ và một véctơ $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Định lý hội tụ chặn Lebesgue kết hợp với tích phân từng phần suy ra

$$\int_\Omega u(z)\langle L\varphi(z)b, b\rangle\, d\lambda(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(z)\langle L\varphi(z)b, b\rangle\, d\lambda(z)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \langle L u_\varepsilon(z)b, b\rangle \varphi(z)\, d\lambda(z) \geq 0.$$

Phần đầu tiên của định lý được chứng minh.

Giả sử $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ và (1.1) được thoả mãn. Đặt $v_\varepsilon = v * \chi_\varepsilon$ với $\varepsilon > 0$. Khi đó $\Delta v \geq 0$ trong Ω, theo nghĩa suy rộng. Theo Định lý 2.5.8 [13], tồn tại duy nhất hàm điều hoà dưới u trên Ω trùng với v hầu khắp nơi và $u = \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon$. Định lý Fubini và (1.1) suy ra

$$\int_\Omega \left\langle L v_\varepsilon(z)b, b\right\rangle \varphi(z)\, d\lambda(z) \geq 0,$$

với mọi $b \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\varphi \geq 0$. Bởi vậy $\left\langle L v_\varepsilon(z)b, b\right\rangle \geq 0$, với mọi $z \in \Omega_\varepsilon$, $b \in \mathbb{C}^n$, và do đó $v_\varepsilon \in PSH(\Omega_\varepsilon)$. Khi $v_{\varepsilon_1} < v_{\varepsilon_2}$ nếu $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, thì hàm giới hạn u là đa điều hoà dưới.

1.1.3. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở trong* $\mathbb{C}^n$. *Khi đó*

(*i*) *Họ* $PSH(\Omega)$ *là nón lồi, tức là nếu* α, β *là các số không âm và* $u, v \in PSH(\Omega)$, *thì* $\alpha u + \beta v \in PSH(\Omega)$.

(*ii*) *Nếu* Ω *là liên thông và* $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset PSH(\Omega)$ *là dãy giảm, thì*

$$u = \lim_{j \to \infty} u_j \in PSH(\Omega) \text{ hoặc } u \equiv -\infty.$$

(iii) *Nếu* $u:\Omega\to\mathbb{R}$, *và nếu* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset PSH(\Omega)$ *hội tụ đều tới* u *trên các tập con compact của* Ω, *thì* $u\in PSH(\Omega)$.

(iv) *Giả sử* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset PSH(\Omega)$ *sao cho bao trên của nó* $u=\sup\limits_{\alpha\in A}u_\alpha$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên* u^* *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

1.1.4. Hệ quả. *Cho* Ω *là một tập mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* ω *là một tập con mở thực sự, khác rỗng của* Ω. *Nếu* $u\in PSH(\Omega)$, $v\in PSH(\omega)$, *và* $\limsup\limits_{x\to y}v(x)\le u(y)$ *với mỗi* $y\in\partial\omega\cap\Omega$, *thì hàm*

$$w=\begin{cases}\max\{u,v\} & trong\ \ \omega\\ u & trong\ \ \Omega\setminus\omega\end{cases}$$

là hàm đa điều hoà dưới trong Ω.

1.1.5. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$.

(i) *Cho* u,v *là các hàm đa điều hoà trong* Ω *và* $v>0$. *Nếu* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *là lồi, thì* $vf(u/v)$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

(ii) *Cho* $u\in PSH(\Omega)$, $v\in PSH(\Omega)$, *và* $v>0$ *trong* Ω. *Nếu* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *là lồi và tăng dần, thì* $vf(u/v)$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

(iii) *Cho* $u,-v\in PSH(\Omega)$, $u\ge 0$ *trong* Ω, *và* $v>0$ *trong* Ω. *Nếu* $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *là lồi và* $f(0)=0$, *thì* $vf(u/v)\in PSH(\Omega)$.

1.1.6. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $F=\{z\in\Omega: v(z)=-\infty\}$ *là một tập con đóng của* Ω, *ở đây* $v\in PSH(\Omega)$. *Nếu* $u\in PSH(\Omega\setminus F)$ *là bị chặn trên, thì hàm* $\bar{u}$ *xác định bởi*

$$\bar{u}(z)=\begin{cases}u(z) & (z\in\Omega\setminus F)\\ \limsup\limits_{\substack{y\to z\\ y\notin F}}u(y) & (z\in F)\end{cases}$$