ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
--------------📖--------------

PHAN THỊ DUYÊN

ĐỊNH LÝ ROLLE TRÊN TRƯỜNG PHỨC
(On the Rolle's Theorem on complex domain.)

Chuyên ngành : Toán ứng dụng
Mã số : 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

MỤC LỤC

Mở đầu……………………………………………………..……….………2

Chương 1. Định lý Rolle cho đa thức trên trường phức…………….............4

1.1 Định lý Rolle cho đa thức với hệ số thực……………………...……....4

1.2 Định lý Gauss-Lucas...…………………………………...……........8

1.3 Giả thuyết Sendov……………………...………………………………15

1.4 Mở rộng Định lý Rolle trên trường phức..………………………………..18

1.4.1 Xác định một điểm tới hạn…….……………………………...19

1.4.2 Tách điểm tới hạn…………..…………………………..………..22

1.5 Xác định vị trí một số điểm tới hạn………………………....................29

1.5.1 Đa thức với hai nghiệm xác định……………………………...30

1.5.2 Đa thức với m nghiệm đã biết………………………………..31

Chương 2. Một số mở rộng Định lý Rolle các vấn đề liên quan……...……..38

2.1 Giả thuyết Sendov về miền Rolle………………………………………38

2.2 Một mở rộng khác của định lý Rolle……………………………….....45

2.2.1 Khái niệm “ở giữa”…………………………………………….....45

2.2.2 Một số kết quả đối với trường hợp tổng quát…………………47

2.2.3 Trường hợp khi P có tối đa ba nghiệm khác nhau…………...48

2.2.4 Trường hợp đa thức có bậc không vượt quá 4………………...51

2.3 Điểm tới hạn của hàm không phải là đa thức………………………...52

Kết luận……………………………………………………………………...56

Tài liệu tham khảo…………………………………………………………...57

MỞ ĐẦU

Định lý Rolle trên trường số thực là một trong những định lý về giá trị trung bình, có ý nghĩa và có rất nhiều ứng dụng trong Giải tích, trong giải phương trình và hệ phương trình, tìm nghiệm hoặc các điểm dừng của đa thức,…

Định lý Rolle về mối quan hệ giữa nghiệm của hàm số và nghiệm của đạo hàm nói chung khá quen thuộc. Một điều tự nhiên sau khi số phức và lý thuyết hàm phức ra đời, là mở rộng *Định lý Rolle* sang cho các hàm số *trên trường số phức*. Một trong những Định lý quan trọng mở rộng Định lý Rolle là Định lý Gauss (1836)-Lucas (1874) nói rằng, tất cả các nghiệm của đa thức đạo hàm nằm trong bao lồi (đa giác lồi) của tất cả các nghiệm của đa thức. Từ đó, *Hình học của đa thức* nghiên cứu quan hệ hình học giữa tập nghiệm của đa thức và tập nghiệm của đạo hàm ra đời và phát triển. Nhiều kết quả mới được tìm ra, nhiều giả thuyết quan trọng được phát biểu.

Luận văn Định lý Rolle trên trường phức có mục đích trình bày tổng quan các kết quả đã biết về Định lý Rolle trên trường phức, chủ yếu cho lớp các hàm đa thức. Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày tổng quan về Định lý Rolle cho đa thức trên trường phức.

Chương này trình bày định lý Rolle cho đa thức trên trường số thực và một số ví dụ mà định lý Rolle không còn đúng trên trường phức, từ đó dẫn đến việc xét bài toán mở rộng Định lý Rolle cho đa thức trên trường số phức. Bài toán này đã được giải quyết theo nghĩa *toàn cục* bởi Định lý Gauss-Lucas. Từ đây nảy sinh Giả thuyết Sendov, một giả thuyết mà 50 năm nay vẫn còn là bài toán mở. Chương 1 cũng trình bày nhiều kết quả khác liên quan đến mở rộng theo nghĩa *địa phương* của Định lý Rolle.

Chương 2 nghiên cứu *miền Rolle*, một cách mở rộng khác của Định lý Rolle dựa trên khái niệm nghiệm của đa thức đạo hàm nằm "ở giữa" hai nghiệm của đa thức. Chương 2 cũng đề cập đến một số mở rộng của Định lý Rolle cho các lớp hàm rộng hơn lớp hàm đa thức.

Khi sắp xếp các kết quả, chúng tôi cố gắng làm rõ bức tranh *Định lý Rolle trên trường phức*, chứng minh các định lý được giải mã và làm sáng tỏ hơn. Nhiều tính toán trong chứng minh được trình bày chi tiết hơn tài liệu gốc.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình và nghiêm túc của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được bày tỏ lòng biết ơn tới người Thày, đã không chỉ hướng dẫn khoa học, mà còn động viên và khích lệ tác giả say mê học tập và nghiên cứu.

Xin bày tỏ lòng biết ơn Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã trang bị cho tôi những kiến thức toán học trong thời gian học Cao học.

Xin được cám ơn Trường Trung học Phổ thông Xuân Giang – Quang Bình, Hà Giang, nơi tôi công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Xin được cám ơn Gia đình, bạn bè đã động viên, giúp đỡ, hi sinh và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học Cao học và viết Luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Phan Thị Duyên

Chương 1

Định lý Rolle cho đa thức trên trường phức

1.1 Định lý Rolle cho đa thức với hệ số thực

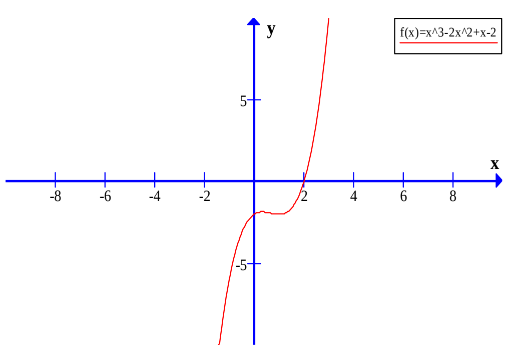
Ta đã biết định lý quen thuộc sau đây.

Định lý 1.1.1 (Rolle, 1691) *Giả sử* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *là một hàm khả vi trên đoạn* $[a,b]\subset\mathbb{R}$, *nhận các giá trị thực và có tính chất* $f(a)=f(b)$. *Khi ấy tồn tại ít nhất một điểm* $c\in(a,b)$ *sao cho* $f'(c)=0$.

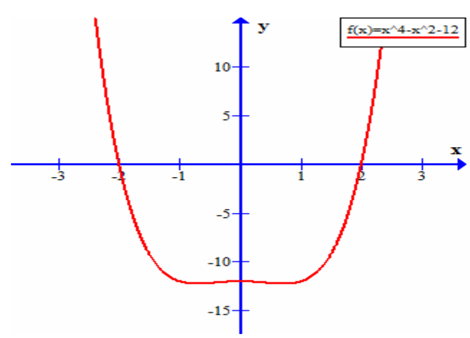
Từ định lý Rolle ta có hệ quả sau cho đa thức.

Hệ quả 1.1.1 *Giả sử đa thức* $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *với các hệ số* $a_i, i=0,1,\ldots,n, a_0\neq 0,$ *là các số thực, có tất cả* $m\geq 2$ *nghiệm thực phân biệt* $x_1<x_2<\ldots<x_m$. *Khi ấy* $P'(x)$ *có không ít hơn* $m-1$ *nghiệm thực* $u_1<u_2<\ldots<u_{m-1}$ *sao cho* $x_1\leq u_1\leq x_2\leq u_2\leq x_3\leq u_3\ldots\leq x_m$.

Nhận xét 1.1.1 Điều kiện $m\geq 2$ là quan trọng. Ví dụ, đa thức $P(x)=(x-2)(x^2+1)$ có duy nhất một nghiệm thực $x=2$, nhưng đa thức đạo hàm $P'(x)=3x^2-4x+1$ có hai nghiệm $x_1=\dfrac{1}{3}$ và $x_2=1$ không trùng với $x=2$ (Hình 1).



Hình 1



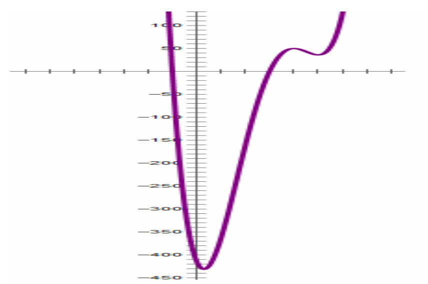
Hình 2

Nhận xét 1.1.2 Đạo hàm $P'(x)$ có thể có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng hai không điểm của $P(x)$. Ví dụ, đa thức bậc bốn $P(x)=(x^2-4)(x^2+3)=x^4-x^2-12$ chỉ có hai nghiệm thực $x_{1,2}=\pm 2$, nhưng $P'(x)=4x^3-2x$ có ba nghiệm thực $x_1=0$ và $x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ nằm trong khoảng $(-2,2)$ (Hình 2).

Nhận xét 1.1.3 Khi số nghiệm thực (không tính bội) nhỏ hơn thật sự bậc của đa thức $(2\le m<n)$ thì đa thức đạo hàm $P'(x)$ có thể có những nghiệm khác nằm ngoài khoảng hai nghiệm của $P(x)$. Ví dụ, đa thức bậc bốn $P(x)=(x^2-2x-3)(5x^2-52x+138)$ chỉ có hai nghiệm thực $x_1=-1$ và $x_2=3$. Nhưng đa thức đạo hàm

$$P'(x)=20(x-4)(x-5)\left(x-\frac{3}{10}\right)$$

có một nghiệm $x=\frac{3}{10}$ nằm trong và hai nghiệm $x_2=4,\ x_3=5$ nằm ngoài khoảng $(-1,3)$ (Hình 3).



Hình 3

Trong Định lý Rolle, từ giả thiết $f(a)=f(b)$ ta khẳng định sự tồn tại nghiệm của đạo hàm trong khoảng $[a,b]$. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Ta có thể thu hẹp đoạn $[a,b]$ chứa nghiệm của đa thức đạo hàm không?- Hai định lý dưới đây trả lời cho câu hỏi trên.

Trước tiên, bằng phép biến đổi tuyến tính $t=\frac{2}{b-a}x-\frac{a+b}{b-a}$, ta luôn có thể coi $a=-1$ và $b=1$.

Định lý 1.1.2 (Lagguerre-Cesàro, [30]) *Giả sử* $P(x)$ *là một đa thức bậc* $n \geq 2$ *với các hệ số thực chỉ có các nghiệm thực và* $a=-1, \quad b=1$ *là hai nghiệm liên tiếp của* $P(x)$. *Khi đó có ít nhất một nghiệm của* $P'(x)$ *nằm trong đoạn* $\left[-1+\frac{2}{n},1+\frac{2}{n}\right]$. *Đoạn* $\left[-1+\frac{2}{n};1+\frac{2}{n}\right]$ *là đoạn tốt nhất có tính chất này theo nghĩa với mỗi* $0<\alpha<\frac{2}{n}$, *tồn tại một đa thức* $P(x)$ *có bậc bằng* n *mà* $P'(x)$ *không có nghiệm trong khoảng* $(-1+\alpha;1+\alpha)$.

Xét các đa thức Legendre

$$P_0(x)=1, \quad P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^m; \quad m=1,2,... \tag{1.1}$$

Thí dụ, $P_1(x)=x; \quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right); \quad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$.

Định lý 1.1.3 (L. Tschakaloff, [30]) *Cho* α_m *là nghiệm lớn nhất của đa thức Legendre bậc* m. *Nếu* $P(x)$ *là một đa thức với các hệ số thực có bậc* $n \leq 2m$ *và* $P(-1)=P(1)$, *thì có ít nhất một nghiệm của* $P'(x)$ *nằm trong khoảng mở* $(-\alpha_m;\alpha_m)$ *với* $n>3$ *và nằm trong khoảng đóng* $[-\alpha_2;\alpha_2]$ *với* $n=3$. *Nếu* $n=2$ *thì* $P'(x)$ *có duy nhất một nghiệm đơn* $\alpha_1=0$. *Hơn nữa với mỗi* $0 \leq \beta_m < \alpha_m$, *tồn tại một đa thức* $P(x)$ *có bậc* $n \leq 2m$ *mà* $P'(x)$ *không có nghiệm trong đoạn* $[-\beta_m;\beta_m]$.

Nhận xét 1.1.4 Định lý Rolle chỉ đúng khi $f(x)$ là hàm số xác định trên tập số thực, nhận giá trị thực và không còn đúng trên tập số phức, theo nghĩa sau: trên các đoạn thẳng nối các điểm là nghiệm của đa thức không nhất thiết có nghiệm của đạo hàm. Ta xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 1 Xét hàm số $f(z)=e^{iz}-1$. Ta có

$$f(z)=e^{iz}-1=0 \Leftrightarrow e^{iz}=1 \Leftrightarrow e^{iz}=e^{0} \Leftrightarrow z=0 \text{ hoặc } z=2k\pi.$$

Vậy $z_1=0$ và $z_2=2\pi$ là hai nghiệm của phương trình $f(z)=e^{iz}-1.$

Nhưng đạo hàm $f'(z)=ie^{iz}=0$ không có nghiệm nói chung, do đó cũng không có nghiệm trong khoảng $(0,2\pi).$

Ví dụ 2 Xét đa thức $P(z)=(z^2-1)(z-i\sqrt{3})=z^3-i\sqrt{3}z^2-z+i\sqrt{3}.$

Ta có

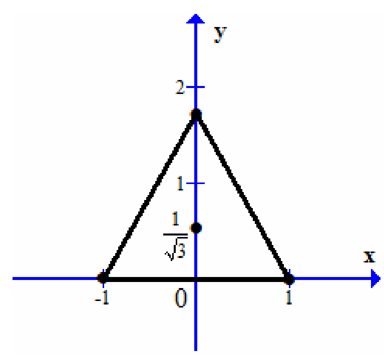
$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z-i\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow z=1; z=-1 \text{ hoặc } z=i\sqrt{3}.$$

Đa thức $P(z)=(z^2-1)(z-i\sqrt{3})=z^3-i\sqrt{3}z^2-z+i\sqrt{3}$

có ba nghiệm $z_{1,2}=\pm 1$ và $z_3=i\sqrt{3}.$ Ba nghiệm z_1,z_2,z_3 của đa thức tạo thành một tam giác cân (Hình 4). Mặt khác, ta có

$$P'(z)=3z^2-2iz\sqrt{3}-1=3\left(z-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2=0 \Leftrightarrow z_1=z_2=\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Nghiệm của đạo hàm $P'(z)=0$ không nằm trên các cạnh của tam giác cân có ba đỉnh là ba nghiệm của đa thức $P(z)$, tức là không nằm trên một trong ba đoạn thẳng nối các nghiệm của đa thức đã cho (Hình 4). Tuy nhiên, nghiệm của đạo hàm nằm trong tam giác có ba đỉnh là nghiệm của đa thức $P(z)$.



Hình 4

Ví dụ 2 cho thấy, Định lý Rolle theo nghĩa tồn tại nghiệm của đạo hàm nằm trên đoạn nối hai điểm nghiệm của hàm số, không còn đúng trên trường phức. Vì vậy, cần phải phát biểu Định lý Rolle cho đa thức trên trường phức một cách thích hợp hơn. Ví dụ 2 cũng gợi ý: *Các điểm nghiệm của đạo hàm phải nằm trong bao lồi của các điểm nghiệm của đa thức*. Đây chính là nội dung Định lý Gauss-Lucas (mở rộng Định lý Rolle) về quan hệ giữa nghiệm của đa thức và nghiệm của đạo hàm. Từ đây ta cũng có Hệ quả: *Nếu tất cả các nghiệm của đa thức nằm trên một đường thẳng* L (không nhất thiết là trục thực) *trên mặt phẳng phức, thì mọi nghiệm của đạo hàm cũng nằm trên đường thẳng ấy*.

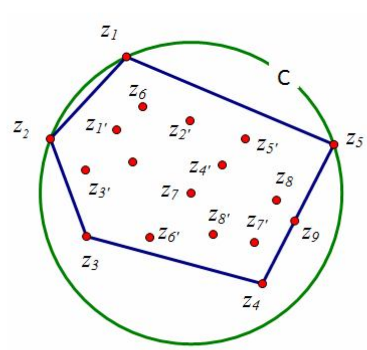
1.2 Định lý Gauss-Lucas

Cho đa thức $P(z)$ với các hệ số phức và nhận giá trị phức. Năm 1836, Gauss đã nhận xét rằng, mọi nghiệm của đa thức đạo hàm $P'(z)$, không trùng với nghiệm bội của đa thức, có thể được coi như là *điểm cân bằng* của một trường lực được tạo ra bởi các hạt đồng chất đặt tại mỗi điểm nghiệm z_i của đa thức (m_i hạt nếu z_i là nghiệm bội m_i), nếu mỗi hạt sinh ra một lực hút tỉ lệ nghịch với khoảng cách các hạt.

Chính vì lẽ đó, nghiệm ζ_j của đa thức đạo hàm $P'(z)=0$ thường được gọi là *điểm cân bằng, điểm tới hạn* hoặc *điểm dừng* của đa thức $P(z)$. Từ nay về sau, các thuật ngữ *nghiệm* ζ *của đa thức đạo hàm, điểm dừng, điểm tới hạn, điểm cân bằng của đa thức* được sử dụng theo cùng một nghĩa $P'(\zeta)=0$.

Từ nhận xét trên của Gauss, năm 1874, F. Lucas, một kĩ sư người Pháp, đã phát biểu và chứng minh Định lý 1.2.1 dưới đây, sau này được gọi là *Định lý Gauss-Lucas*.

Định lý 1.2.1 (Gauss-Lucas) *Tất cả các điểm tới hạn của đa thức* $P(z)$ *với hệ số phức nằm trong bao lồi* H *của các nghiệm của* $P(z)$. *Nếu các nghiệm của* $P(z)$ *không nằm trên một đường thẳng thì không có điểm tới hạn nào của* $P(z)$ *nằm trên biên của* H, *trừ khi đó là nghiệm bội của* $P(z)$ (Hình 5).



Hình 5

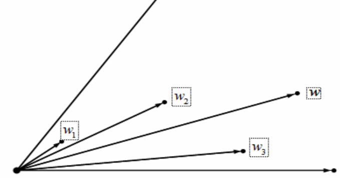
Định lý Gauss-Lucas có rất nhiều cách chứng minh, thí dụ, ngoài Gauss và F. Lucas, trong [18], trang 21, M. Marden đã liệt kê 13 tác giả chứng minh Định lý Gauss-Lucas (trước 1932): G. J. Legebeke (1881); F. De Boer (1884); S. Berlothy (1884); M. E. Cesàro (1885); M. Bôcher (1892); J. H. Grace (1902); T. Hayashi (1914); F. Irwin (1915); B. Gonggryp (1915); M. B. Porter (1916); Y. Uchida (1916); M. Krawtchouk (1926); J. V. Sz. Nagy (1918, 1932). Có thể xem một số chứng minh Định lý Gauss-Lucas trong [2], [6], [18], [22], [30],… Dưới đây chúng tôi trình bày chứng minh Định lí Gauss-Lucas theo Jerry Shao–Chieh Cheng (2012, [6]).

Để chứng minh Định lý Gauss-Lucas, trước tiên ta chứng minh Định lý 1.2.2 (Cheng, 2012, [6]) dưới đây, là tổng quát hóa một kết quả của Marden (1966, [18], trang 1).

Định lý 1.2.2 *Giả sử các số phức* $\omega_j = r_j e^{i\theta_j} \neq 0,\ j = 1,2,\dots,p,$ *thỏa mãn điều kiện* $\gamma \le \theta_j < \gamma + \delta,\ \ j = 1,2,\dots,p,$ *trong đó* γ, δ *là các số thực, và* $0 < \delta < \pi.$ *Khi đó tổng* $\omega = \sum_{j=1}^{p} \omega_j := re^{i\theta}$ *của các số phức* ω_j *cũng khác không. Hơn nữa,* $\gamma \le \theta < \gamma + \delta$ (Hình 6).

Chứng minh Định lí 1.2.2 nói rằng, nếu tất cả các số phức (các vectơ) $\omega_j = r_j e^{i\theta_j} \neq 0$ cùng nằm trong miền giới hạn bởi hai tia tạo với nhau một góc $0 < \delta < \pi$ thì vectơ tổng $\omega = \sum_{j=1}^{p} \omega_j := re^{i\theta}$ cũng nằm trong góc ấy.

Không hạn chế tổng quát, chỉ cần chứng minh Định lý 1.2.2 đúng với $\gamma = 0.$ Kết quả trong trường hợp tổng quát có thể thu được nhờ phép quay với góc quay là γ (cùng chiều kim đồng hồ nếu $\gamma > 0$).



Hình 6