

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DOÃN BẢO NGUYỄN

ĐỊNH LÝ PTÔLÊMÊ
VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Công trình được hoàn thành tại

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học TS. NGUYỄN VĂN MINH

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Tháng 06 năm 2013

Có thể tìm hiểu luận văn tại

Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu	3
1 Định lý Ptôlêmê và bất đẳng thức Ptôlêmê	5
1.1 Định lý Ptôlêmê	5
1.2 Bất đẳng thức Ptôlêmê	10
2 Định lý Ptôlêmê mở rộng	14
2.1 Định lý Ptôlêmê trong không gian	14
2.1.1 Bất đẳng thức Ptôlêmê trong không gian ba chiều .	14
2.1.2 Bất đẳng thức Ptôlêmê trong không gian n chiều .	17
2.2 Định lý Bretschneider	19
2.3 Định lý Casey	22
3 Ứng dụng của định lý Ptôlêmê và bất đẳng thức Ptôlêmê	34
3.1 Ứng dụng trong việc chứng minh một số kết quả hình học .	34
3.1.1 Điểm Toricelli	34
3.1.2 Bất đẳng thức Erdos-Mordell	37
3.1.3 Công thức tính $\sin(\alpha + \beta)$	38
3.1.4 Định lý Pythagore	39
3.1.5 Định lý hàm số cosin trong tam giác	39
3.1.6 Hệ thức Feuerbach	40
3.1.7 Định lý Carnot	41
3.2 Ứng dụng trong việc giải một số bài toán	42
3.2.1 Định lý Ptôlêmê và tứ giác điều hòa	42
3.2.2 Định lý Ptôlêmê và một số bài toán cực trị hình học	45
3.2.3 Định lý Ptôlêmê và một số đẳng thức, bất đẳng thức hình học	52
Kết luận	61
Tài liệu tham khảo	62

Mở đầu

Ptôlêmê hay Claudius Ptolemaeus (khoảng 100-178) là một nhà bác học Hy Lạp xuất xứ từ Tebaida, học hành và làm việc tại Alexandria. Ptôlêmê sinh ra ở thành phố Ptôlêmmat Hecmin (Thượng Ai Cập), trong cuộc đời của mình ông đã có công đóng góp vào sự phát triển khoa học của nhân loại. Ông đã viết nhiều tác phẩm trong các lĩnh vực như toán học, thiên văn học, địa lý và âm nhạc...

Bất đẳng thức Ptôlêmê và trường hợp đặc biệt của nó, định lý Ptôlêmê về tính chất của tứ giác nội tiếp là một trong những kết quả kinh điển và đẹp của hình học sơ cấp.

1. Lý do chọn đề tài

Định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê và những mở rộng của nó, những ứng dụng của nó rất quan trọng trong việc giải quyết một số bài toán hình học. Nêu cách thức vận dụng định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê để giải một số bài toán ở cấp trung học cơ sở, trung học phổ thông và bồi dưỡng học sinh giỏi toán. Với ý tưởng này, tôi chọn đề tài cho mình là *Định lý Ptôlêmê và một số ứng dụng*.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của đề tài này là trình bày về nội dung của định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê. Ứng dụng của định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê vào giải quyết một số bài toán hình học.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Khảo sát lý thuyết định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê và những định lý hình học, những bài toán có liên quan. Đó là những ứng dụng quan trọng của các kết quả này trong hình học. Sử dụng định lý Ptôlêmê, bất đẳng thức Ptôlêmê trong một số bài toán dành cho học sinh giỏi toán các

cấp.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, tủ sách chuyên toán, các tạp trí toán học và tuổi trẻ cũng như từ bài học kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp và các bạn học viên trong lớp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học cơ sở, trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương. Luận văn được hoàn thành dưới sự định hướng và hướng dẫn tận tình của TS. Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả đã nhận được sự quan tâm giúp đỡ của Khoa Toán, phòng đào tạo sau đại học trường ĐHKH - ĐHTN. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tới các bạn học viên lớp toán K5A, các thầy cô trong tổ toán và Ban Giám Hiệu trường THPT Hoàng Su Phì Hà Giang đã giúp đỡ và tạo điều kiện để tác giả hoàn thành luận văn này.

Chương 1

Định lý Ptôlêmê và bất đẳng thức Ptôlêmê

1.1 Định lý Ptôlêmê

Định lý 1.1 (Xem [2]). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Khi đó

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Có rất nhiều cách chứng minh định lý này, sau đây xin trình bày một số cách chứng minh.

- **Cách 1:** Sử dụng kết quả của hai tam giác đồng dạng

Chứng minh. Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$. Khi đó xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{MCB}$. Nên $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle MBC$ (g.g)

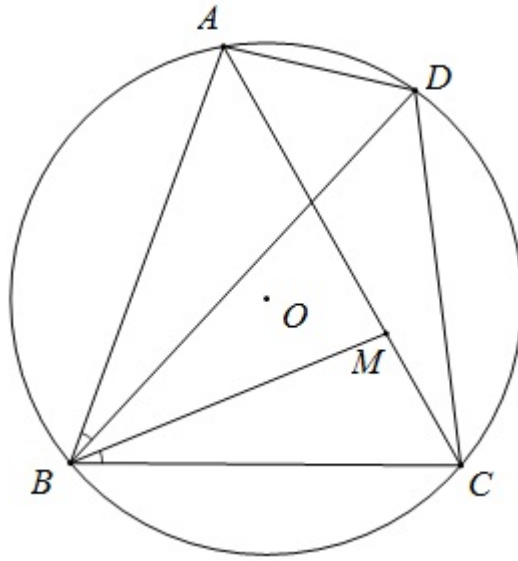
do đó ta có

$$\frac{AD}{BD} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = BD \cdot MC \quad (1.1)$$

Lại có $\frac{AD}{BD} = \frac{MC}{BC}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$ nên $\triangle ABM$ đồng dạng với $\triangle DBC$ (g.g).

Suy ra

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AM \cdot BD \quad (1.2)$$



Hình 1.1

Từ (1.1) và (1.2) suy ra

$$AD.BC + AB.CD = BD.MC + AM.BD = AC.BD \quad \square$$

• **Cách 2:** Sử dụng đường thẳng Simson

Trước hết ta có định lý về đường thẳng Simson

Từ một điểm D trên vòng tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ta lần lượt hạ các đường vuông góc xuống BC, CA, AB, chúng tương ứng gặp BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Khi đó các điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, và đường thẳng tạo bởi ba điểm này được gọi là đường thẳng Simson.

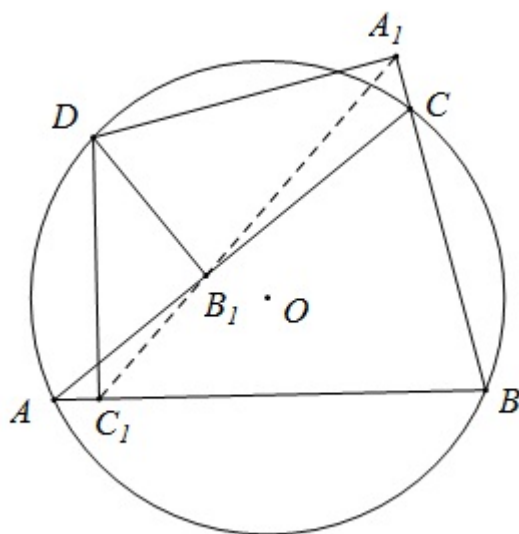
Ta sẽ sử dụng đường thẳng Simson để chứng minh định lý Ptôlêmê.

Chứng minh. Hạ DA_1 vuông góc với BC, DB_1 vuông góc với AC và DC_1 vuông góc với AB thì A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1 \quad (1.3)$$

Áp dụng định lý hàm số sin cho các đường tròn đường kính DC, DB, DA và các dây cung A_1B_1, A_1C_1 và B_1C_1 tương ứng, ta có

$$A_1B_1 = DC \cdot \sin C, A_1C_1 = DB \cdot \sin B, B_1C_1 = AD \cdot \sin A$$



Hình 1.2

Lại áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác ABC, ta có

$$\sin C = \frac{AB}{2R}, \sin B = \frac{AC}{2R}, \sin A = \frac{BC}{2R}$$

Thay vào đẳng thức (1.3) và rút gọn, ta thu được

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

□

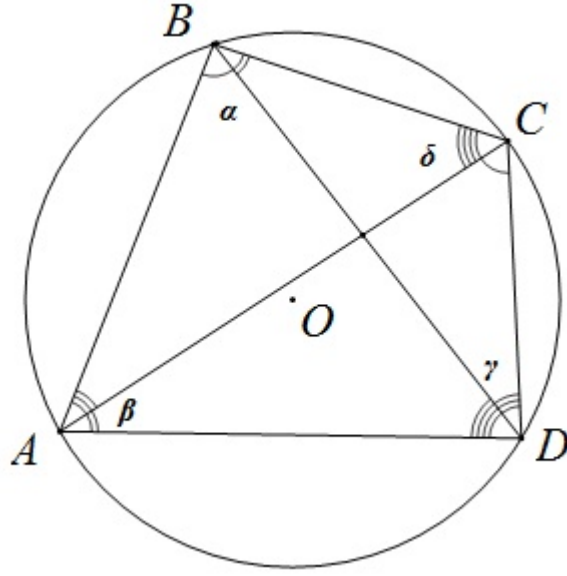
- **Cách 3:** Chứng minh định lý Ptôlêmê dùng định lý hàm số sin trong tam giác

Chứng minh. Đặt

$$\begin{aligned} \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \alpha; \widehat{DBC} = \widehat{DAC} = \beta \\ \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \gamma; \widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \delta \end{aligned}$$

Áp dụng định lý hàm số sin trong các tam giác ABD, ACD, ABC ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= 2R^2(2 \sin \delta \sin \beta + 2 \sin \alpha \sin \gamma) \\ &= 2R^2 [\cos(\delta - \beta) - \cos(\delta + \beta) + \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)] \end{aligned} \quad (1.4)$$



Hình 1.3

Vì $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0$ suy ra

$$\cos(\delta + \beta) = -\cos(\alpha + \gamma) \quad (1.5)$$

Từ (1.4) và (1.5) suy ra

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = 2R^2[\cos(\delta - \beta) + \cos(\alpha - \gamma)] \quad (1.6)$$

Lại áp dụng định lý hàm số sin vào $\triangle ACD, \triangle BCD$, có

$$AC \cdot BD = 2R \sin(\gamma + \delta) 2R \sin(\delta + \alpha) = 2R^2[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma + 2\delta)] \quad (1.7)$$

Vì $(\alpha + \gamma + 2\delta) + (\beta - \delta) = 180^0$ suy ra

$$\cos(\alpha + \gamma + 2\delta) = -\cos(\beta - \delta) \quad (1.8)$$

Thay (1.8) vào (1.7) ta có

$$AC \cdot BD = 2R^2[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\delta - \beta)] \quad (1.9)$$

Từ (1.6) và (1.9) suy ra $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. $\square$

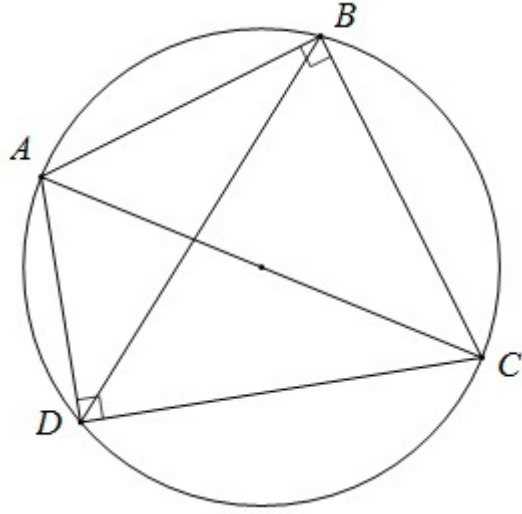
Hệ quả 1.1 (Xem [5]). Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp với $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$, khi đó ta có

$$BD = AC \cdot \sin \widehat{BDA}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} AC \cdot \sin \widehat{BAD} &= AC \cdot \sin(\widehat{BAC} + \widehat{DAC}) \\ &= AC \left(\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{AC} + \frac{DC}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} \right) = \frac{AB \cdot DC + BC \cdot AD}{AC} = BD \end{aligned}$$

Vì $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ theo định lý Ptôlêmê.



Hình 1.4

□

Bài toán 1.1 (Xem [5]). Cho P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp của các tam giác APB, APC . Chứng minh rằng các đường thẳng AP, BO_1, CO_2 đồng quy tại một điểm.

Giải. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P tương ứng xuống BC, CA, AB . Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{DFE} &= \widehat{DFP} + \widehat{EFP} = \widehat{DBP} + \widehat{EAP} \\ &= (90^\circ - \widehat{DPB} + 90^\circ - \widehat{EPA}) = 180^\circ - (360^\circ - \widehat{APB} - \widehat{DPE}) \\ &= -180^\circ + \widehat{APB} + (180^\circ - \widehat{ACB}) = \widehat{APB} - \widehat{ACB} \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$\widehat{DEF} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$