

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**HOÀNG DIỆU ANH**

**PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ  
GIẢI BÀI TOÁN Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên – 2013**

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**HOÀNG DIỆU ANH**

**PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ  
GIẢI BÀI TOÁN Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG**

**Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG  
Mã số: 60460112**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. VŨ VINH QUANG**

**Thái Nguyên – 2013**

# MỤC LỤC

	Trang
<b>MỤC LỤC</b>	<b>1</b>
<b>LỜI CẢM ƠN</b>	<b>3</b>
<b>MỞ ĐẦU</b>	<b>4</b>
<b>Chương 1: CÁC MÔ HÌNH TOÁN HỌC TRONG VẤN ĐỀ MÔI TRƯỜNG</b>	<b>7</b>
1.1. Phương trình truyền tải vật chất trong khí quyển , tính duy nhất nghiệm	7
1.2. Phương trình truyền tải dừng	12
1.3. Bài toán truyền tải vật chất, tính duy nhất nghiệm	15
1.4. Bài toán liên hợp cho miền ba chiều	19
1.5. Tính duy nhất nghiệm của bài toán liên hợp	23
<b>Chương 2: PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG DỪNG</b>	<b>26</b>
2.1. Các lược đồ sai phân xấp xỉ cấp hai cho bài toán không dừng với toán tử phụ thuộc thời gian	26
2.1.1 Bài toán thuần nhất dạng 1	26
2.1.2 Bài toán thuần nhất dạng 2	33
2.2. Phương pháp phân rã	35
2.2.1 Bài toán thuần nhất	35
2.2.2 Bài toán không thuần nhất	37
2.3. Phương pháp phân rã nhiều thành phần	39
2.3.1. Bài toán thuần nhất	40
2.3.2. Bài toán không thuần nhất	42
<b>Chương 3: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ TRONG</b>	<b>45</b>

<b>BÀI TOÁN Ô NHIỄM KHÍ QUYỀN</b>	
3.1. Bài toán ô nhiễm khí quyển	45
3.2. Lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm khí quyển	47
3.2.1 Lược đồ sai phân	47
3.2.2 Các lược đồ phân rã	49
3.2.3 Kết quả thực nghiệm	53
3.3 Bài toán nhiều nguồn phát	54
<b>KẾT LUẬN</b>	<b>57</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO</b>	<b>58</b>
<b>PHẦN PHỤ LỤC</b>	<b>59</b>

## LỜI CẢM ƠN

Bằng tấm lòng thành kính, tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc và sự kính trọng tới:

- Thầy giáo TS. Vũ Vinh Quang đã quan tâm tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong quá trình triển khai nghiên cứu đề tài và hoàn thành luận văn này.

- Các thầy cô trong Khoa Toán – Tin cùng toàn thể các cán bộ, nhân viên trường ĐH Khoa học , trung tâm học liệu của ĐH Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu khoa học, tạo thuận lợi các thủ tục hành chính, tài liệu cần thiết để tôi hoàn thành bài luận văn .

- Ban Giám hiệu trường Phổ thông Dân Tộc Nội Trú Tỉnh – Tỉnh Lai Châu, các thầy cô giáo trong tổ toán và anh em bè bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

*Thái Nguyên, ngày 6 tháng 5 năm 2013*

**Tác giả**

**Hoàng Diệu Anh**

## MỞ ĐẦU

Thực tế cho thấy, ô nhiễm môi trường là một vấn đề quan trọng, có tính cấp thiết trên toàn thế giới. Phương pháp phân rã giải bài toán ô nhiễm môi trường có rất nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực. Chẳng hạn, đó là những bài toán về cơ học lưu lượng tử, năng lượng hạt nhân, những quá trình tác động học phi tuyến trong vật lý, hóa học và một số bài toán trong các lĩnh vực khác.

Trong phạm vi đề tài này, chúng tôi đề cập tới các bài toán liên quan đến môi trường và khí hậu. Sự tác động qua lại của các phần tử khí trong môi trường chính là trọng tâm cần nghiên cứu mang tính khoa học và thực tiễn cao vì nó ảnh hưởng trực tiếp tới sự sống trên trái đất.

Trong môi trường không khí, khí quyển, các thành phần khí cũng như các thành phần khác được pha trộn lẫn nhau (theo một tỷ lệ nào đó) dưới tác động của gió và hiện tượng khuếch tán trong môi trường.

Khí thải công nghiệp là tác nhân lớn nhất gây ô nhiễm không khí. Các thực thể vật chất bị nhiễm bẩn ở dạng khí (khói nhà máy, lò hạt nhân, núi lửa, v.v...) được lan truyền, khuếch tán trong khí quyển, tác động với nhau dưới sự ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm tạo thành một hợp chất phức tạp, gọi chung là hợp chất khí. Trong quá trình chuyển động các thành phần của hợp chất khí tác động với nhau, một số thành phần đang từ không độc hại trở thành độc hại đối với đời sống sinh vật. Quá trình này dẫn đến ô nhiễm các lục địa và đại dương.

Để giải quyết được vấn đề đó ta cần biết được những quá trình lan truyền và khuếch tán các thực thể nhiễm bẩn trong môi trường vì khi di chuyển chúng sẽ không biến thành những thành phần có hại và ngược lại. Đó là vấn đề rất đáng quan tâm. Vì thế giới không ngừng hoàn thiện, bên cạnh đó

là nền công nghiệp phát triển. Chính vì vậy, để bảo vệ môi trường chúng ta phải điều chỉnh những tiềm năng sẵn có trong thiên nhiên để ít bị mất đi, mà còn nâng cao nó, cải thiện môi trường. Tuy nhiên đòi hỏi một lượng kinh phí rất lớn, cần sự chung tay, góp sức của cả quốc gia và sự quan tâm của nhân loại.

Ở phương diện toán học, nhiệm vụ chủ yếu để giải quyết những vấn đề này là xây dựng được mô hình toán học phản ánh đúng đắn bản chất tự nhiên khách quan của các hiện tượng và tìm ra các mối quan hệ biện chứng về định tính, định lượng, phương pháp hữu hiệu nhằm giải quyết bài toán đặt ra để từ đó định ra chiến lược bảo vệ môi trường sống. Nội dung của đề tài này, chúng tôi trình bày những phương trình liên hợp được phân tích dựa trên các phương trình cơ bản đã được thừa nhận các điều kiện biên, điều kiện ban đầu đồng thời nghiên cứu các phương pháp giải các bài toán thu được kết quả cuối cùng mà nhờ chúng có thể đánh giá được mức độ tác động của thực trạng ô nhiễm trong môi trường của một vùng lãnh thổ.

Nội dung chương 1 là phân tích các mô hình toán học khác nhau của bài toán ô nhiễm môi trường. Mỗi bài toán cơ bản đều được xây dựng thông qua một bài toán liên hợp tương ứng nhờ đẳng thức phân tích Lagrange. Tính duy nhất nghiệm của bài toán cơ bản và bài toán liên hợp đối với những mô hình chính được chứng minh một cách chặt chẽ.

Chương 2 giới thiệu phương pháp sai phân giải bài toán không dừng và thuật toán phân rã 1 thành phần và nhiều thành phần giải các bài toán sai phân thuần nhất và không thuần nhất. Cơ sở toán học của phương pháp phân rã, tính ổn định và tính chính xác của thuật toán đối với từng lược đồ phân rã.

Chương 3 xây dựng phương pháp giải các bài toán đặt ra ở chương 1. Do độ phức tạp của phương trình, với những giả thiết về điều kiện biên, giá trị ban đầu chặt chẽ người ta mới nhận được nghiệm chính xác của bài toán. Thực tế

cho thấy các bài toán đặt ra thường rộng hơn, phức tạp hơn. Do đó, việc tìm các phương pháp giải số cho lớp các bài toán trên là một trong những phương pháp hữu hiệu được sử dụng. Luận văn trình bày phương pháp xấp xỉ toán tử vi phân của bài toán khuếch tán đặt ra ở chương 1 bằng toán tử sai phân với độ chính xác cấp hai theo các biến không gian và thoả mãn tính không âm, xây dựng các lược đồ phân rã đối với bài toán ô nhiễm môi trường từ đó chuyển việc tìm nghiệm số của bài toán về các hệ phương trình đại số dạng 3 đường chéo.

Trong luận văn, các lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm môi trường được cài đặt bằng ngôn ngữ Matlab trên máy tính PC.



# CHƯƠNG 1

## CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA TRUYỀN TẢI VÀ KHUYẾT TÁN VẬT CHẤT.

Môi trường, các trạng thái của nó và vấn đề ô nhiễm từ lâu đã trở thành vấn đề trọng tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Các chất thải công nghiệp với các thành phần nhiễm bẩn được thải vào khí quyển và đại dương gây tác động xấu đến môi trường không khí, môi trường nước, đất và môi trường sinh thái của các vùng công nghiệp lớn. Điều này đã làm tăng nồng độ cacbondiôxít và các thành phần khác trong khí quyển. Những thay đổi của quá trình sinh thái được biểu hiện rõ nét ở những khu công nghiệp lớn như “Mưa axit” v.v..

Sự lan truyền các thực thể nhiễm bẩn trong khí quyển là do các luồng gió và sự chuyển động rối. Dòng chảy trung bình của các thực thể vật chất ấy được trung bình hoá và được xem như là hiện tượng khuếch tán trên nền chuyển động trung bình.

Ta sẽ xem xét các mô hình toán học khác nhau của sự truyền tải và khuếch tán vật chất trong môi trường lỏng và môi trường khí.

### **1.1 Phương trình truyền tải vật chất trong khí quyển, tính duy nhất nghiệm** ( Xem tài liệu [2,5,6]).

Giả sử  $\varphi(x, y, z, t)$  là cường độ chất thải nào đó di chuyển cùng với dòng không khí trong khí quyển, ta sẽ xác định nghiệm của bài toán trong một miền hình trụ  $G$  với bề mặt  $S$ .  $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_H$ ,

trong đó  $\Sigma$  là mặt bên (hay mặt xung quanh) của hình trụ  $G$ .

$\Sigma_0$  là mặt đáy dưới khi  $z = 0$ .

$\Sigma_H$  là mặt đáy trên khi  $z = H$ .

Gọi  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  là véc tơ vận tốc của các phần không khí, được coi như là hàm của  $x, y, z, t$  (trong đó  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các véc tơ đơn vị của các trục  $x, y, z$  tương ứng). Sự dịch chuyển của các thực thể vật chất dọc theo quỹ đạo của các hạt không khí với sự bảo toàn cường độ của nó được mô tả bởi phương trình:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (1.1.1)$$

Hay

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.1.2)$$

Do ở lớp dưới khí quyển là lớp tiếp giáp với mặt đất, với độ chính xác khá cao, có thể xem không khí là chất không nén được, thể hiện bằng phương trình liên tục

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.1.3)$$

Từ phương trình (1.1.2) ta đi đến phương trình

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div}\vec{V}\varphi = 0 \quad (1.1.4)$$

Về sau, nếu không nói gì thêm ta luôn xem  $\text{div}\vec{V} = 0$ .

Ta đưa vào phương trình (1.1.4) điều kiện ban đầu:

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0 \quad (1.1.5)$$

và điều kiện biên trên  $S$  của miền trụ  $G$

$$\varphi = \varphi_s \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0 \quad (1.1.6)$$

trong đó  $\varphi_0, \varphi_s$  là các hàm cho trước,  $u_n$  là hình chiếu của véc tơ  $\vec{V}$  lên pháp tuyến ngoài đối với mặt  $S$ . Để tìm nghiệm  $\varphi(x, y, z, t)$  của bài toán (1.1.4)