ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ NINH

THUẬT TOÁN NÓN XOAY GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN VỚI BIẾN BỊ CHẶN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Quy hoạch tuyến tính là một bộ phận quan trọng trong quy hoạch toán học.Nhiều vấn đề thực tế có thể mô tả dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.Các bài toán quy hoạch phi tuyến thường được giải quyết hiệu quả bằng cách xấp xỉ thông qua bài toán quy hoạch tuyến tính.Trong những thập kỷ qua, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, quy hoạch toán học đã có những bước tiến lớn trong đó phải nói đến các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính gắn liền với tên tuổi của các nhà toán học như L.V. Kantorovich (1939),George Dantzig (1947),Lemke (1954),Leonid Khachian (1979),Karmarkar (1984)...

Bài toán quy hoạch tuyến tính có hai dạng cơ bản là dạng chuẩn và dạng chính tắc,hai dạng này có quan hệ mật thiết với nhau.Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính,còn bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán quy hoạch có miền ràng buộc là một hệ phương trình tuyến tính với các biến của nó có dấu không âm.Chúng ta đã biết,qua các phép biến đổi có thể dễ dàng đưa bài toán từ dạng chuẩn về dạng chính tắc,khi đó sẽ làm cho số chiều của bài toán tăng lên đáng kể nếu số ràng buộc bất phương trình tuyến tính của bài toán dạng chuẩn là lớn,vì phải thêm vào nhiều biến bù (để đưa các ràng buộc bất phương trình về phương trình).

Thuật toán đơn hình cổ điển và đơn hình đối ngẫu do George Dantzig và Lemke đề xuất vào những năm 1947 và 1954 đã giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc.Chúng được coi là những thuật toán cơ bản sử dụng giải các bài toán thực tế trong các viện nghiên cứu ứng dụng và giảng dạy ở các trường Đại học,Cao đẳng trong nước và trên Thế giới.

Để giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng thuật toán đơn hình hay đơn hình đối ngẫu cần biết trước một cơ sở đơn vị xuất phát ban đầu,đôi khi để có được một cơ sở như vậy chúng ta lại phải đi giải một bài toán quy hoạch tuyến tính khác hoặc giải một bài toán tương đương nhiều chiều hơn với một cơ sở "chấp nhận được" gọi là giả phương án và như vậy có thể ta phải trải qua khá nhiều bước lặp (không cần thiết) mới vượt khỏi các giả phương án để đi đến lời giải của bài toán ban đầu. Sự thật các bài toán quy hoạch tuyến tính được xây dựng từ thực tế thông thường đều ở dạng chuẩn và chưa biết được một điểm chấp nhận của miền ràng buộc.Như vậy để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình và đơn hình đối ngẫu,đòi hỏi chúng ta phải thực hành qua nhiều bước trung gian rồi mới nhận được lời giải của bài toán gốc.

Chính vì những lý do trên nên luận văn này trình bày phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn và thuật toán nón xoay tuyến tính giải cho lớp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn gọi là các thuật toán nón xoay BBC,với cơ sở xuất phát ban đầu được nhận biết dễ dàng và trong trường hợp tổng quát có thể xuất phát từ gốc toạ độ là đỉnh của nón Ortang dương R^n_+ hay từ véc tơ đơn vị hoặc gần đơn vị.Hơn thế nữa,dù miền ràng buộc của bài toán bị thoái hoá cũng không ảnh hưởng đến tính hữu hạn bước lặp của phương pháp nón xoay.Các thuật toán nón xoay này là các biến thể từ phương pháp nón-min giải bài toán quy hoạch gần lồi-gần lõm đề xuất trong cuốn sách "Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính"([2]).

Trong các trường hợp khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bằng phương pháp cắt-nhánh cận hoặc tái tối ưu hoá thì việc áp dụng các thuật toán nón xoay tỏ ra rất hiệu quả.Một số ví dụ bằng số minh hoạ cho các thuật toán nón xoay giải chúng trong luận văn này đều được lấy từ sách,giáo trình và nhiều tài liệu,công trình nghiên cứu trong nước và nước ngoài của các tác giả khác nhau.Kết quả tính toán đi đến lời giải của các bài toán này bởi thuật toán nón xoay cho thấy hầu hết số bước lặp và số phép toán trong mỗi bước lặp đều ít hơn rõ rệt so với việc giải chúng bằng các thuật toán đơn hình hay đơn hình đối ngẫu. Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 trình bày bài toán quy hoạch tổng quát, các khái niệm cơ bản về tập lồi và một số mô hình thực tế đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn cùng với một số phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính quen thuộc và thông dụng.

Chương 2 trình bày những khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính, từ đó làm cơ sở lý thuyết cho việc xây dựng phương pháp nón xoay tuyến tính giải trục tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón-min của hàm mục tiêu bài toán.

Chương 3 (dựa trên phương pháp nón xoay đề nghị trong chương 2) trình bày việc xây dựng thuật toán nón xoay BBC giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn và các ví dụ bằng số minh hoạ cho thuật toán giải này.

Thuật toán nón xoay BBC giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn đề nghị trong luận văn này được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các ngôn ngữ như Pascal,C,Java... Luận văn này hoàn thành dựa trên các cuốn sách "Quy hoạch gần lồi - gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính" ([2]) và cuốn "Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay" [1] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Hoàng Thị Ninh

Chương 1

Bài toán tối ưu tổng quát và một số mô hình bài toán thực tế

1.1 Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biển như sau:
Cực đại hoá (cực tiểu hoá) hàm

$$f(x) \to \max(\min), \tag{1.1}$$

Với các điều kiện

$$g_i(x)(\leq, =, \geq)b_i, i = 1, \ldots, m. \tag{1.2}$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Bài toán (1.1)–(1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu,các hàm $g_i(x), i = 1, \ldots, m$ được gọi là các hàm ràng buộc,mỗi đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc.
Tập hợp

$$D = \{x \in X \setminus g_i(x)(\leq, =, \geq)b_i, i = 1, \ldots, m\}, \tag{1.4}$$

Được gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được). Mỗi điểm $(x = x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được).Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu,cụ thể là :

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D,$$

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D.$$

Được gọi là phương án tối ưu (hay là lời giải) của bài toán (1.1) - (1.3).

Sau đây chúng ta sẽ trình bày các bước xây dựng, khảo sát và phân tích mô hình toán học từ một vấn đề thực tế.

Việc mô hình hóa toán học cho một vấn đề thực tế có thể chia ra làm 4 bước:

Bước 1: Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế,tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các quy luật mà chúng phải tuân theo.

Bước 2: Xây dựng mô hình cho vấn đề đang xét,tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính.

Bước 3: Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giả quyết bài toán hình thành trong Bước 2.

Bước 4: Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong Bước 3.Ở đây có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mô hình và các kết quả tính toán phù hợp với thực tế.Khi đó cần lập một bảng tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, mô hình toán học thuật toán tối ưu,chương trình,cách chuẩn bị số liệu để đưa vào máy tính.

Khả năng 2: Mô hình và các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế.Trong trường hợp này cần phải xem xét các nguyên nhân của nó.

1.2 Một số mô hình thực tế

1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu phát biểu như sau:Giả sử một xí nghiệp sản xuất n loại sản phẩm và sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau.Ta đưa vào các kí hiệu sau,x_j là lượng sản phẩm loại $j(j = 1, \ldots, n)$ mà xí nghiệp sản xuất,c_j là tiền lãi (hay giá bán) đối với một đơn vị sản phẩm $j(j = 1, \ldots, n)$, a_{ij} là suất chi phí tài nguyên loại i để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j, b_i là lượng dự trữ tài nguyên loại $i(i = 1, \ldots, n)$.Trong các điều kiện đã cho,hãy xác định các giá trị $x_j, j = 1, \ldots, n$ sao cho tổng tiền lãi (hay tổng giá trị sản lượng hàng hóa) là lớn nhất với số tài nguyên hiện có.
Mô hình toán học có dạng bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

Với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ..., m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n.$$

1.2.2 Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (đánh số $i = 1, \ldots, m$),lượng hàng hóa ở kho i là $a_i, i = 1, ..., m$.Gọi kho i là điểm phát i.Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng trên (đánh số $j = 1, \ldots, n$ với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là $b_j, j = 1, \ldots, m$).Gọi điểm tiêu thụ j là điểm thu j.

Gọi c_{ij} là cước vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm phát i đến điểm thu j.Hàng có thể chuyển từ điểm phát i bất kỳ đến điểm thu j bất kỳ.Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ các điểm phát tới các điểm thu sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ điểm phát i đến điểm thu j.Khi đó ta có mô hình toán học:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

Với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, ..., n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n.$$

Ngoài ra còn có điều kiện thu phát:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

1.2.3 Bài toán cái túi

Một người du lịch muốn đem theo một cái túi nặng không quá b kilogam.Có n loại đồ vật mà anh ta dự định đem theo.Mỗi một đồ vật loại j có khối lượng a_j kilogam và giá trị c_j.Người du lịch muốn chất vào túi các đồ vật sao cho tổng giá trị đồ vật đem theo là lớn nhất. Ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ chất vào túi.Ta có bài toán sau:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n,$$

$$x_j \text{ nguyên}, \quad j = 1, ..., n.$$

Đây là một bài toán quy hoạch nguyên.

1.3 Tập lồi đa diện

1.3.1 Một số khái niệm cơ bản

1. Đường thẳng,đoạn thẳng,siêu phẳng

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$.Ta gọi đường thẳng qua a, b là tập hợp điểm có dạng:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1 - \lambda) b, \forall \lambda \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì ta có đoạn thẳng $[a, b]$. Trong không gian hai chiều,phương trình bậc nhất $ax + by = c$ xác định một đường thẳng,một bất phương trình $ax + by \le c$ xác định một nửa mặt phẳng.Trong không gian ba chiều,một phương trình bậc nhất $ax + by + cz = d$ xác định một mặt phẳng,một bất phương trình $ax + by + cz \le d$ xác định một nửa không gian.

Ta có thể suy rộng kết quả trên cho không gian n chiều.Tập hợp tất cả các điểm trong không gian n chiều thỏa mãn phương trình

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \alpha.$$

được gọi là một siêu phẳng.

Một bất phương trình $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \le \alpha$ xác định một nửa không gian.