ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN THỊ BÍCH

THUẬT TOÁN ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG LAI GHÉP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐOÀN THỊ BÍCH

THUẬT TOÁN ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG LAI GHÉP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số : 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ bảo nghiêm khắc của thầy giáo GS. TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tác giả cũng xin kính gửi lời cảm ơn đến cô giáo TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy, cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011 - 2013, những người đã tâm huyết giảng dạy và trang bị cho tác giả nhiều kiến thức cơ sở.

Xin gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5B đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp quý báu của Quý thầy, cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2013.

Tác giả

Đoàn Thị Bích

LỜI NÓI ĐẦU

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$ tương ứng. Giả sử C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong H và f là song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ sao cho $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Trong luận văn này ta sẽ xét bài toán cân bằng sau đây, được ký hiệu là EP(C, f):

$$\text{Tìm } \; x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Bài toán EP(C, f) còn được gọi là bất đẳng thức Ky Fan để ghi nhận sự đóng góp của ông trong lĩnh vực này (xem [2], [5] và các trích dẫn).

Một phương pháp cơ bản để giải bài toán cân bằng là phương pháp chiếu và các dạng của nó. Tuy nhiên phương pháp chiếu chỉ hội tụ với điều kiện song hàm có tính đơn điệu mạnh, hay là có tính tự bức (đơn điệu mạnh ngược), ngay cả cho bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, là một trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng đơn điệu.

Để thu được phương pháp chiếu hội tụ cho bài toán cân bằng có tính đơn điệu nhẹ hơn, trong [16] các tác giả đã mở rộng phương pháp đạo hàm tăng cường (hay là chiếu hai lần) do Korpelevich [8] lần đầu tiên đề xuất cho bài toán tối ưu và bài toán điểm yên ngựa. Với phương pháp này sự hội tụ được đảm bảo ngay trong trường hợp song hàm f có tính giả đơn điệu.

Bài toán cân bằng đơn điệu có liên quan chặt chẽ với bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn. Về mặt lý thuyết bài toán cân bằng đơn điệu và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn có mối quan hệ tương hỗ lẫn nhau, theo nghĩa, với một vài giả thiết tự nhiên, bài toán này có thể mô tả dưới dạng bài toán kia và ngược lại. Cả hai lớp bài toán này thực chất đều thuộc bài toán chấp nhận lồi, tức là bài toán tìm một điểm chung của các tập lồi.

Phương pháp lặp Halpern là phương pháp cơ bản để tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Tuy nhiên phương pháp này chỉ có tính hội tụ yếu. Để đảm bảo tính hội tụ mạnh, phương pháp Halpern và phương pháp cắt đã được kết hợp.

Cụ thể Tada và Takahashi [13] đã trình bày một thuật toán kết hợp phương pháp điểm gần kề và siêu phẳng cắt để đảm bảo tính hội tụ mạnh của điểm gần kề, tại đó với mỗi bước lặp k, phép lặp x^{k+1} được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } \; z^k \in C \text{ sao cho } f(z^k, y) + \frac{1}{\lambda_k}\langle y - z^k, z^k - x^k\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

$$\begin{cases} \omega^k = \alpha_k x^k + (1-\alpha_k)T(z^k), \\ C_k = \left\{z \in H : \left\|\omega^k - z\right\| \leq \left\|x^k - z\right\|\right\}, \\ D_k = \left\{z \in H : \left\langle x^k - z, x^0 - x^k\right\rangle \geq 0\right\}, x^{k+1} = P_{C_k \cap D_k}(x^0), \end{cases}$$

trong đó $\lambda_k > 0$ là tham số tại bước lặp k; $x^0 \in C$ và $P_{C_k \cap D_k}(x^0)$ là phép chiếu khoảng cách trên $C_k \cap D_k$ của điểm x^0; $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn. Với giả thiết song hàm f đơn điệu trên C, các dãy $\{\alpha^k\}$, $\{\lambda^k\}$ thỏa mãn các tính chất đề ra thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến một nghiệm chung của bài toán cân bằng $EP(C, f)$ và điểm bất động của T.

Mục đích của bản luận văn này là giới thiệu những kiến thức cơ bản nhất của bài toán cân bằng và trình bày một thuật toán lai ghép giữa phương pháp đạo hàm tăng cường với phép lặp Halpern cho bài toán tìm nghiệm chung của bài toán cân bằng giả đơn điệu và bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực. Để bảo đảm tính hội tụ mạnh, kỹ thuật siêu phẳng cắt ở [13] đã được kết hợp trong thuật toán này. Sự hội tụ mạnh của thuật toán đã được chứng minh chi tiết cho trường hợp bài toán cân bằng giả đơn điệu. Các đặc điểm quan trọng của thuật toán trình bày trong luận văn so với các thuật toán trong [4] và [13, 14] là:

1. Sự hội tụ mạnh được bảo đảm mà không cần đến giả thiết chính quy;

2. Trong mỗi bước lặp của thuật toán, bài toán cân bằng đơn điệu mạnh nảy sinh trong thuật toán điểm gần kề trong [13] được thay thế bằng hai bài toán quy hoạch lồi mạnh. Về mặt tính toán các bài toán sau dễ giải hơn nhiều, đồng thời nó lại cho phép giải được bài toán cân bằng giả đơn

điệu, trong khi thuật toán điểm gần kề chỉ có thể áp dụng cho bài toán cân bằng đơn điệu.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến đề tài. Các vấn đề liên quan đến sự tồn tại nghiệm và các trường hợp riêng của bài toán cân bằng cũng được đề cập đến.

Chương 2 trình bày phương pháp đạo hàm tăng cường lai ghép giải bài toán cân bằng. Các bổ đề cần thiết để chứng minh cho sự hội tụ mạnh của phương pháp cũng như định lý về sự hội tụ mạnh của phương pháp cũng được trình bày ở đây.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

H: Không gian Hilbert thực;
X: Không gian Banach thực;
$\mathbb{R}$: Tập các số thực;
$\emptyset$: Tập rỗng;
I: Ánh xạ đồng nhất;
$\langle a, b \rangle$: Tích vô hướng của 2 véc-tơ a và b;
$\|x\|$: Chuẩn của x;
$\partial f(x)$: Dưới vi phân của hàm f tại x;
$\forall x$: Với mọi x;
$x^n \to x$: Dãy $\{x^n\}$ hội tụ mạnh tới x;
$x^n \rightharpoonup x$: Dãy $\{x^n\}$ hội tụ yếu tới x;
$x := y$: Nghĩa là, x được định nghĩa bằng y;
$P_C(x)$: Hình chiếu của x lên C.

Chương 1

Bài toán cân bằng

Chương này trình bày các khái niệm liên quan đến bài toán cân bằng, sự tồn tại nghiệm, các tính chất cơ bản và các trường hợp riêng quan trọng của bài toán cân bằng. Các kiến thức trong chương được trích từ tài liệu [1-5], [7], [12], [15].

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. *Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:*

1. $\|x\| > 0, \forall x \neq 0; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathrm{X};$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|, \forall x \in \mathrm{X}, \alpha \in \mathbb{R}.$

Định nghĩa 1.2. *Cặp $(H, \langle , \rangle)$ trong đó H là một không gian tuyến tính thực và*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: H \times H \to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in H;$

3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in H$;

4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \forall x, y, z \in H$.

được gọi là không gian tiền Hilbert.
Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.
Ví dụ 1.1. $L^2_{[a,b]}$, không gian các hàm bình phương khả tích trên [a,b] với $f \in L^2_{[a,b]}$ sao cho $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx < +\infty$, là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx;$$

và chuẩn

$$\|f\|_{L^2_{[a,b]}} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

Trên H có hai kiểu hội tụ chính sau:
Định nghĩa 1.3. *Xét dãy $\{x^n\}_{n\geq 0}$ và x thuộc không gian Hilbert thực H. Khi đó:*

- *Dãy $\{x^n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới x, ký hiệu $x^n \to x$, nếu như*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x^n - x\| = 0.$$

- *Dãy $\{x^n\}$ được gọi là hội tụ yếu tới x, ký hiệu $x^n \rightharpoonup x$, nếu*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \omega, x^n\rangle = \langle \omega, x\rangle, \quad \forall \omega \in H.$$

Ta nhắc lại các kết quả trong giải tích hàm (xem [1]) liên quan đến hai loại hội tụ này.

Mệnh đề 1.1.

- *Nếu $\{x^n\}$ hội tụ mạnh đến x thì cũng hội tụ yếu đến x.*
- *Mọi dãy hội tụ mạnh (yếu) đều bị chặn và giới hạn theo sự hội tụ mạnh (yếu) nếu tồn tại là duy nhất.*