ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Hồng Điệp

VẤN ĐỀ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - 2013

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của khóa luận này em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn PGS-TS Hà Tiến Ngoạn đã giao đề tài và tận tình hướng dẫn em trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành khóa luận này.

Nhân dịp này em xin gửi lời cảm ơn của mình tới toàn bộ các thầy cô giáo trong khoa Toán- trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô ở Viện Toán học đã giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Đồng thời, tôi xin cảm ơn các anh chị và các bạn trong lớp K5 đặc biệt là các bạn học ngành toán ứng dụng đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại lớp.

Tôi xin cảm ơn các thầy cô, anh chị và các bạn đồng nghiệp công tác tại trường THPT Nguyễn Đức Cảnh - Kiến Thụy - Hải Phòng đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về thời gian và công tác để tôi hoàn thành khóa học.

Xin chân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 05 năm 2013

Người viết luận văn

Nguyễn Hồng Điệp

MỞ ĐẦU

Phương trình đạo hàm riêng được nghiên cứu lần đầu tiên vào giữa thế kỉ 18 trong các công trình của những nhà toán học như Euler, D'Alambert, Lagrange và Laplace như là một công cụ quan trọng để mô tả các mô hình của vật lí và cơ học. Những bài toán có nội dung tương tự vẫn còn được nghiên cứu đến tận ngày nay và là một trong những nội dung cơ bản của lí thuyết đạo hàm riêng. Chỉ đến giữa thế kỉ 19 và đặc biệt là trong các công trình của Riemann, phương trình đạo hàm riêng mới trở thành công cụ mạnh dùng trong những lĩnh vực toán học khác. Cả hai hướng nói trên đã tác động trực tiếp đến sự phát triển của lí thuyết phương trình đạo hàm riêng và ngược lại, phương trình đạo hàm riêng đóng vai trò quan trọng trong các lĩnh vực khác của toán học lí thuyết và đặc biệt là trong các bài toán thực tiễn.

Một bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng, nếu nó có ý nghĩa thực tiễn thì chắc chắn nó có nghiệm, chỉ có điều là nghiệm đó được hiểu theo nghĩa nào mà thôi. Nhiều phương trình vi phân đạo hàm riêng mà ta nghiên cứu nói chung là có nghiệm.

Năm 1957 nhà toán học Hans Lewy [6] đã phát hiện ra ví dụ về một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một mà không có nghiệm(cho dù là nghiệm suy rộng) với một số hàm vế phải trơn cho trước. Do đó từ ví dụ trên đã xuất hiện một hướng nghiên cứu mới về tính giải được của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính.

Một minh họa hình học và một mở rộng của ví dụ này được đưa ra năm 1960 bởi Lars Hörmander

Luận văn được chia làm 2 chương:

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về công thức tích phân từng phần, toán tử đạo hàm riêng tuyến tính và toán tử liên hợp, trình bày một ví dụ về một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một mà không có nghiệm và một số định lí về không gian Hilbert.

Chương 2: Trình bày về tính giải được của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, điều kiện cần và đủ để phương trình đạo hàm riêng tuyến tính có nghiệm yếu và tính giải được của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính với hệ số hằng.

Nội dung chính của luận văn dựa trên chương 1 của tài liệu [5].

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên trong quá trình viết luận văn cũng như trong xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả luận văn rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2013.

Người thực hiện

Nguyễn Hồng Điệp

Một số kí hiệu

Trong luận văn này ta dùng những kí hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

$\mathbb{N}$	tập hợp số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$\mathbb{C}$	tập hợp số phức
$+\infty$	dương vô cùng
$\|\| \cdot \|\|$	chuẩn trong $L^2(\Omega)$
$\overline{z}$	liên hợp của số phức z
$(\cdot, \cdot)$	tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$
$\mathrm{Re}z$	phần thực của số phức z
$\mathrm{Im}z$	phần ảo của số phức z

Chương 1

KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 Toán tử vi phân đạo hàm riêng tuyến tính

Toán tử vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp m có dạng

$$A(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m} a_\mu(x) D^\mu, \tag{1.1}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mu \quad &= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n \\ |\mu| \quad &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ x \quad &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$a_\mu(x)$ là các hàm trơn cho trước, nhận giá trị phức và

$$D^\mu = (-i)^{|\mu|} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \tag{1.2}$$

là toán tử lấy đạo hàm riêng cấp $|\mu|$.

Ví dụ 1.1.1. Giả sử với $m = 3$ và $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad \mu_j \in \mathbb{N}$

với $j = 1, 2, 3$ thì với u là một hàm ba biến x_1, x_2, x_3. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{|\mu|=3} D^\mu u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_3^2} \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^3}\end{aligned}$$

Toán tử A là tuyến tính bởi vì D^μ là tuyến tính và ta có

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A(u_1) + \alpha_2 A(u_2)$$

trong đó $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{C}$ và $u_1,\ u_2$ là các hàm số.

1.2 Công thức tích phân từng phần. Toán tử liên hợp

1.2.1 Công thức tích phân từng phần

Cho Ω là tập hợp mở, liên thông trong $\mathbb{E}^n$ có biên $\partial\Omega$ trơn từng mẩu. Bao đóng của Ω là $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Giả sử Ω bị chặn, tức là $\Omega \subset \Sigma_R$ với R đủ lớn, ở đây

$$\Sigma_R = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n | x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < R^2\right\}.$$

Nếu $f \in C^1(\overline{\Omega})$ thì ta có công thức tích phân từng phần sau đây

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} f \gamma_k d\sigma, \quad 1 \le k \le n, \tag{1.3}$$

trong đó $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, γ_k là cosin của góc tạo bởi trục x_k với pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega$ và $d\sigma$ là phần tử diện tích của mặt cong $\partial\Omega$.

Trong trường hợp đặc biệt, nếu u và v là hai hàm khả vi liên tục trên $\overline{\Omega}$ và thỏa mãn $uv = 0$ trên $\partial\Omega$ thì công thức (1.3) được viết lại thành

$$\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_k}dx = -\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_k}dx,\ 1 \le k \le n. \tag{1.4}$$

Công thức (1.4) được gọi là *công thức tích phân từng phần*.

1.2.2 Toán tử liên hợp

Từ công thức (1.4), đặt

$$\bar{w} = v$$

và

$$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, D = (D_1, D_2 \cdots, D_n) \tag{1.5}$$

ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (D_k u)\bar{w}dx &= -\int\limits_{\Omega} uD_k\bar{w}dx \\ &= \int\limits_{\Omega} u\overline{D_k w}dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Công thức (1.2) được viết lại như sau

$$\begin{aligned} D^{\mu} &= D_1^{\mu_1} D_2^{\mu_2} \ldots D_n^{\mu_n} \\ &= (-i)^{|\mu|}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\ldots\partial x_n^{\mu_n}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cho

$$A(x, D)u = \sum_{|\mu| \le m} a_{\mu}(x)D^{\mu}u$$

là toán tử vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp m.

Giả sử $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ là hàm thuộc $C^m(\Omega)$ và triệt tiêu ở gần biên $\partial\Omega$. Áp dụng liên tiếp công thức tích phân (1.4) ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} A(u)\bar{\varphi}dx &= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\mu|\le m} a_\mu(x) D^\mu(u)\bar{\varphi}dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\mu|\le m} (D^\mu u)(a_\mu(x)\overline{\varphi})dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \sum_{|\mu|\le m} u D^\mu(a_\mu(x)\bar{\varphi})dx.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Đặt

$$A'(x,D)\varphi = \sum_{|\mu|\le m} D^\mu\left(\overline{a_\mu(x)}\varphi\right) \tag{1.9}$$

thì A' được gọi là *toán tử liên hợp* của toán tử A. Khi đó ta có

$$\int\limits_{\Omega} A(u)\bar{\varphi}dx = \int\limits_{\Omega} u\overline{A'\varphi}dx, \quad \text{với mọi} \quad \varphi \in C_0^m(\Omega). \tag{1.10}$$

Đặt $b_\mu(x) = \overline{a_\mu(x)}$ thì công thức (1.9) được viết lại là

$$A'(x,D)\varphi = \sum_{|\mu|\le m} D^\mu\left(b_\mu(x)\varphi\right) \tag{1.11}$$

Dễ thấy A' cũng là một toán tử vi phân đạo hàm riêng tuyến tính cấp m. Đặc biệt khi A là toán tử với hệ số hằng và nhận giá trị thực thì A' trùng với A.

Mệnh đề 1.2.1. *Cho u là một hàm liên tục trên Ω và giả sử*

$$\int\limits_{\Omega} u\bar{\varphi}dx = 0, \ \text{với mọi} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.12}$$

trong đó φ là hàm tiêu hạn ở dải gần biên $\partial\Omega$. Khi đó ta khẳng định u đồng nhất bằng 0 trong Ω.

Chứng minh. Giả sử $x^0 \in \Omega$ sao cho $u(x^0) \neq 0$ và

$$Re\ u(x^0) > 0, \tag{1.13}$$

trong đó $Re\ u(x^0)$ là *phần thực* của $u(x^0)$. Vì u là một hàm liên tục nên tồn tại một $\varepsilon-$lân cận của điểm x^0 sao cho $Re\ u(x) > 0$, với mọi x mà $|x - x^0| < \varepsilon$, trong đó

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Ta khẳng định có thể tìm được hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\varphi(x) > 0 \text{ với } |x - x^0| < r, \quad 0 < r < \varepsilon$$

và

$$\varphi(x) = 0 \text{ với } |x - x^0| \geq r.$$

Thật vậy, ta đặt

$$j(x) = \begin{cases} \exp\left[(|x|^2 - 1)^{-1}\right] & \text{nếu } |x| < 1 \\ 0 & \text{nếu } |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

và chọn $\varphi(x) = j\left(\dfrac{x - x^0}{r}\right)$ thì rõ ràng $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ và hàm $u\varphi(x)$ cũng có tính chất

$$\text{Re }\ (u\varphi(x)) > 0 \text{ với } |x - x^0| < r$$

và

$$\text{Re }\ (u\varphi(x)) = 0 \text{ với } |x - x^0| \geq r.$$

Suy ra

$$\text{Re }\left(\int\limits_\Omega u\varphi dx\right) > 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (1.12) nên giả thiết (1.13) là sai.

Chứng minh tương tự ta có $\text{Re }(u(x^0))$ không thể nhỏ hơn 0.

Vậy

$$\text{Re } u = 0.$$

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\text{Im }(u(x)) = 0.$$