ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM HÙNG KHÁNH

TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ÁP DỤNG GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM HÙNG KHÁNH

TOÁN TỬ CHIẾU VÀ ÁP DỤNG GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên nghành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên – 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả trình bày trong luận văn là hoàn toàn trung thực, được các tác giả cho phép sử dụng và luận văn hoàn toàn không trùng lặp với bất kì tài liệu nào khác.

Tác giả

Phạm Hùng Khánh

Mục Lục

Mục lục .... **i**

Lời cảm ơn .... **ii**

Mở đầu **1**

Chương 1. Tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert **3**

1.1. Không gian Hilbert **3**

1.1.1. Không gian tiền Hilbert **3**

1.1.2. Không gian Hilbert **4**

1.1.3. Các ví dụ **4**

1.1.4. Một số tính chất cơ bản **5**

1.2. Tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert **10**

1.2.1. Tập lồi **10**

1.2.2. Hàm lồi **14**

Chương 2. Phép chiếu trong không gian Hibert **19**

2.1. Định nghĩa và ví dụ **19**

2.2. Các tính chất cơ bản **26**

2.3. Một số trường hợp cụ thể **28**

Chương 3. Áp dụng giải bài toán cân bằng **32**

3.1. Bài toán cân bằng **32**

3.1.1. Phát biểu bài toán cân bằng **32**

3.1.2. Những trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng **35**

3.2. Phương pháp chiếu giải bài toán cân bằng **48**

Kết luận **56**

Tài liệu tham khảo **57**

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Lê Dũng Mưu người thầy đã luôn tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và giúp đỡ tác giả trong quá trình làm khóa luận để tác giả hoàn thành được khóa luận này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn trân thành và sâu sắc tới các thầy, cô trong khoa Toán – Trường Đại Học Sư Phạm – Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường.

Qua đây tác giả xin trân thành cảm ơn tới người thân trong gia đình đã luôn động viên tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong được sự đóng góp ý kiến của các quý thầy, cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2013

Tác giả

Phạm Hùng Khánh

MỞ ĐẦU

Giải tích lồi là môn học cơ bản của giải tích hiện đại, nghiên cứu về tập lồi, hàm lồi và các vấn đề liên quan. Bộ môn này có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác của toán học ứng dụng, đặc biệt là trong tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, các bài toán cân bằng,..v.v..có thể nói giải tích lồi là một trong những bộ môn quan trọng nhất làm cơ sở toán học của tối ưu hóa.

Sau các kết quả đầu tiên của H.Minkowski (1910) về tập lồi và hàm lồi, lý thuyết giải tích lồi đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, lý thuyết giải tích lồi được quan tâm nghiên cứu nhiều trong khoảng bốn mươi năm trở lại đây bởi các công trình nổi tiếng của H.Minkowski, C.Caratheodory, W.Fenchel, J.J.Moreau, R.T.Rockafellar, L.klee, A.Brondsted, W.V.Jensen, G.Choquet và nhiều tác giả khác.

Trong không gian Hilbert, phép chiếu xuống một tập lồi đóng có nhiều tính chất quan trọng. Việc tồn tại và tính duy nhất của hình chiếu xuống một tập lồi đóng là cơ sở để chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nhiều bài toán khác nhau trong giải tích ứng dụng như lý thuyết xấp xỉ, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân và trong các vấn đề khác. Trong toán học tính toán rất nhiều phương pháp giải dựa trên việc tìm hình chiếu của một điểm xuống một tập lồi. Trong trường hợp tổng quát, đây là bài toán khó giải. Tuy nhiên khi tập lồi có những cấu trúc riêng thì bài toán này có thể được giải một cách hiệu quả bởi những chương trình phần mềm hiện nay đã có sẵn. Thậm chí trong trường hợp đặc biệt, khi tập lồi là hình cầu, siêu hộp, đơn hình, nửa không gian..v.v...thì hình chiếu xuống các tập này có thể tính theo công thức tường minh.

Mục đích của luận văn này là để nghiên cứu về toán tử chiếu trong không gian Hilbert và việc giải bài toán cân bằng dựa vào các phương pháp chiếu.
Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản về không gian Hilbert, tập lồi và hàm lồi trong không gian Hilbert, định lí tách, tính liên tục, dưới vi phân. Các kiến thức này sẽ được sử dụng trong các chương sau.

Chương 2: Xét phép chiếu trong không gian Hilbert về định nghĩa, ví dụ, các tính chất cơ bản và một số trường hợp cụ thể.

Chương 3: Giới thiệu bài toán cân bằng và một số vấn đề liên quan đến bài toán này như: Các trường hợp riêng quan trọng; sự tồn tại nghiệm; các dạng tương đương;..v...v....Cuối cùng là trình bày một thuật toán chiếu dưới gradient xấp xỉ để giải một lớp bài toán cân bằng.

Chương 1

TẬP LỒI VÀ HÀM LỒI TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trong chương này, ta sẽ trình bày lại một số kết quả sẽ được dùng cho các chương sau. Đó là các kiến thức cơ bản về không gian Hilbert và giải tích lồi. Nội dung trong chương được trích dẫn chủ yếu từ tài liệu tham khảo $[1];[2];[3]$ và $[4]$.

1.1. Không gian Hilbert

1.1.1. Không gian tiền Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Cho H là không gian trên trường □ . Tích vô hướng xác định trên H là một ánh xạ xác định như sau:*

$\langle .,. \rangle : \underset{(x,y)}{H \times H} \underset{\mapsto \langle x,y \rangle}{\to K}$*, thỏa mãn các điều kiện sau đây:*

a, $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ *với mọi* $x, y \in H$.

b, $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$ *với mọi* $x, y, z \in H$.

c, $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$ *với mọi* $x, y \in H; \lambda \in K$.

d, $\langle x,x \rangle \geq 0$ *với mọi* $x \in H$ *và* $\langle x,x \rangle = 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.

Số $\langle x,y \rangle$ *được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y. Cặp* $(H, \langle .,. \rangle)$ *được gọi là không gian tiền Hilbert (Hay còn gọi là không gian Unita).*

Từ định nghĩa ta thấy rằng tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ chính là một dạng song tuyến tính xác định dương trên H. Khi đó H được gọi là không gian tiền Hilbert thực.

Định lí 1.1. *Cho H là không gian tiền Hilbert với* $x, y \in H$ *, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle.$$

Chú ý 1.1. Bất đẳng thức ở định lí 1.1 được gọi là bất đẳng thức Schwarz, trong bất đẳng thức Schwarz dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 1.2. *Cho H là không gian tiền Hilbert. Khi đó* $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, x \in H$ *xác định một chuẩn trên H.*

1.1.2. Không gian Hilbert

Một không gian tiền Hilbert, xem như không gian định chuẩn, có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

Định nghĩa 1.2. *Nếu H là một không gian tiền Hilbert và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng thì được gọi là không gian Hilbert*.

Cũng tương tự như trường hợp không gian tiền Hibert, với trường $\mathbb{R}$ thì ta có không gian Hilbert thực.

1.1.3. Các ví dụ

1) $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,

trong đó:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2) Xét không gian:

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_n \subset K \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Ta đã biết l^2 là không gian Banach với chuẩn $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$. (1.1)

Với $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, nhờ bất đẳng thức Buniakowski ta có:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right|^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2 < +\infty.$$

Dễ kiểm tra rằng: $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ xác định một tích vô hướng trong l^2 và nó cảm sinh (1.1). Vậy l^2 là một không gian Hilbert.

3) Cho (X, A, μ) là một không gian độ đo và $E \in A$. Xét không gian

$$L^2(E, \mu) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \,|\, \int_E |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

ta đã biết $L^2(E,\mu)$ là một không gian Banach với chuẩn:

$$\| f \| = \left(\int_E | f |^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hơn nữa, với $f, g \in L^2(E,\mu)$, từ bất đẳng thức Holder về tích phân, ta có:

$$\int_E | fg | d\mu \le \left(\int_E | f |^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E |g|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$\langle f, g \rangle = \int_E fg d\mu,$$

xác định một tích vô hướng trong $L^2(E,\mu)$ và $L^2(E,\mu)$ là không gian Hilbert thực.

1.1.4. Một số tính chất cơ bản

Định lí 1.3: *Cho H là một không gian Hilbert. Khi đó:* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *là một hàm liên tục.*

Chứng minh: Cho $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong không gian tiền Hilbert H lần lượt hội tụ về x_0, y_0. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} &\left| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle \right| \le \left| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle \right| + \left| \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle \right| \\ &= \left| \langle x_n, y_n - y_0 \rangle \right| + \left| \langle x_n - x_0, y_0 \rangle \right| \\ &\le \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Theo giả thiết (x_n) hội tụ trong H nên nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số M>0 sao cho: $\|x_n\| \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vì vậy, ta có:

$$\left| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle \right| \le M \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\|.$$

Cho $n \to \infty$, theo giả thiết ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle \right| = 0 \text{ hay } \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle.$$

Suy ra tích vô hướng là một hàm liên tục. $\square$