ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRỊNH KHẮC BÌNH

BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRỊNH KHẮC BÌNH

BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 60 46 01 02

Giáo viên hướng dẫn:
TS NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, 2013

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới TS. Nguyễn Văn Ngọc, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Tác giả

Trịnh Khắc Bình

Mục lục

Mở đầu

Phương pháp biến đổi tích phân là một trong những phương pháp giải tích hữu hiệu giải các phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng và các phương trình tích phân dạng chập tuyến tính. Các biến đổi tích phân quan trọng, như biến đổi Fourier, biến đổi Laplace, biến đổi Hankel, v.v.. từ lâu đã được sử dụng trong giải các phương trình vi phân và phương trình tích phân tuyến tính hệ số hằng.

Nhờ các tính chất đặc thù của các phép biến đổi tích phân kể trên, các phương trình vi phân, phương trình tích phân có dạng và miền khảo sát thích hợp có thể được chuyển về các phương đại số tương ứng. Từ đó, sử dụng các công thức nghịch đảo, ta tìm được ẩn hàm mong muốn.

Bản luận văn này trình bày cơ sở lý thuyết của các biến đổi tích phân sau đây: chuỗi Fourier(biến đổi Fourier hữu hạn), biến đổi tích phân Fourier, Fourier-sin, Fourier-cosin và biến đổi Laplace cùng một số ứng dụng của chúng trong phương trình đạo hàm riêng và một số loại phương trình tuyến tính khác.

Luận văn gồm phần Mở đầu, 4 chương, Kết luận và các tài liệu tham khảo. Bản luận văn được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1-5].

Chương 1, trình bày một số kiến thức về giải tích và giải tích hàm cần thiết đối với các chương sau. Các kiến thức của chương này có thể tìm thấy trong tài liệu [1].

Chương 2, trình bày cơ sở lý thuyết về chuỗi Fourier đối với các hàm lượng giác và những ứng dụng giải các bài toán biên của các phương trình đạo hàm riêng trong miền hữu hạn. Các kiến thức của chương này chủ yếu được trích ra từ các tài liệu [1, 4, 5].

Chương 3, trình bày cơ sở lý thuyết của biến đổi Fourier và một số ứng dụng giải các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng trong miền vô hạn. Nội dung cơ bản của chương này được hình thành từ các tài liệu [1, 2, 3 , 4].

Chương 4, trình bày cơ sở lý thuyết của biến của biến đổi Laplace và một số ứng dụng giải các phương trình vi phân thường, phương trình đạo hàm riêng và phương trình tích phân dạng chập. Các kiến thức của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1, 4].

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về giải tích và giải tích hàm cần thiết đối với các chương sau. Các kiến thức của chương này có thể tìm thấy trong tài liệu [1].

1.1 Không gian L^p

Định nghĩa 1.1. *Cho $p \in \mathbb{R}$ với $1 \le p \le \infty$; ta định nghĩa*
$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ *hoặc* $\mathbb{C}$; *f đo được và* $|L|^p$ *khả tích* $\}$,
$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to$ *hoặc* $\mathbb{C}$; *f đo được và* $\exists C, |f(x)| \le C$ *h.h trên* Ω $\}$,
và kí hiệu:

$$\|f\|_p = \left\{ \int\limits_\Omega |f(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$
$$\|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \le C, h.h\}.$$

Nhận xét 1.1. *Nếu $f \in L^\infty(\Omega)$ thì:*

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty, \quad h.h\, x \in \Omega.$$

Ta ký hiệu p' là số liên hợp của p, $1 \le p \le \infty, i.e, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Chữ "nghĩa là" thường được viết tắt bởi "i.e", chữ "hầu hết" được viết tắt bởi "h.h".

Định lý 1.1. *(Bất đẳng thức Hölder).*
Cho $f \in L^p(\Omega)$ và $g \in L^{p'}(\Omega)$ với $1 \le p \le \infty$. Khi đó $f.g \in L^1$ và

$$\int_\Omega |f.g| \le \|f\|_p.\|g\|_{p'}.$$

Dựa vào bất đẳng thức Hölder, ta chứng minh được

Định lý 1.2. *$L^p(\Omega)$ là không gian vector $\|\cdot\|_p$ và là một chuẩn với $1 \le p \le \infty$.*

Định lý 1.3. *(Fischer – Riesz)*
(a) L^p là không gian Banach với $1 \le p \le \infty$.
(b) Giả sử (f_n) là dãy hội tụ về f trong không gian $L^p, (1 \le p \le \infty)$, i.e,. $\|f_n - f\|_p \to 0$. Thế thì có dãy con $(f_{nk})_{k=1,2,...}$ sao cho:

$$f_{nk}(x) \to f(x) \ \ h.h,$$

$$\forall k, |f_{nk}(x)| \le h(x) \ \ h.h,$$

với h là một hàm trong L^p.

Với Ω mở trong $\mathbb{R}$, ta ký hiệu $C^k(\Omega)$ là không gian các hàm số khả vi liên tục đến cấp k và $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$. Còn $C_c(\Omega)$ là không gian các hàm số f liên tục trên Ω sao cho giá (support) của f , tức là tập hợp

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \ne 0\}},$$

là compact chứa trong Ω, ký hiệu gạch ngang ở trên là bao đóng của tập hợp. Đặt

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \bigcap C_c(\Omega),$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \bigcap C_c(\Omega).$$

Ta có kết quả sau đây về tính trù mật.

Định lý 1.4. *Với $1 \le p < \infty$ (lưu ý rằng $p \ne \infty$), thì $C_c^\infty(\Omega)$ trù mật trong $L^p(\Omega)$.*

Định lý 1.5. *(Riemann- Lesbesgue). Cho $f \in L^1(a,b)$ với (a,b) là khoảng hữu hạn hoặc vô hạn của $\mathbb{R}$, thì ta có*

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x) \cos Nx dx = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x) \sin Nx dx = 0.$$

Chứng minh. Hai điều khẳng định của định lý được chứng minh theo một cách giống nhau. Vì vậy ta chỉ chứng minh một.

Cho trước $\varepsilon > 0$. Từ định lý về tính trù mật ta có một hàm g (chỉ phụ thuộc vào ε) trong $C_c^\infty(a,b)$ sao cho

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vì g có giá trị compact trong (a,b) nên g triệt tiêu bên ngoài một khoảng hữu hạn $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(x)\cos Nx dx\right| &= \left|\int_\alpha^\beta g(x)\cos Nx dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{N} g(x)\sin N\, x|_\alpha^\beta - \frac{1}{N}\int_\alpha^\beta g'(x)\sin Nx dx\right| \\
&= \frac{1}{N}\left|\int_\alpha^\beta g'(x)\sin Nx dx\right| \\
&\le \frac{1}{N}\int_\alpha^\beta |g'(x)|\, dx = \frac{1}{N}\|g'\|_1.
\end{aligned}$$

Vậy với N đủ lớn thì

$$\left|\int_a^b g(x)\cos Nx dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kéo theo

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\cos Nx dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\cos Nx dx + \int_a^b g(x)\cos Nx dx\right| \\
&\le \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \left|\int_a^b g(x)\cos Nx dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kết thúc chứng minh. $\square$