BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Phạm Thị Thuỷ

BÀI TOÁN BIÊN CHO MỘT VÀI LỚP PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái nguyên - 2013

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

––––––––––

Phạm Thị Thuỷ

BÀI TOÁN BIÊN CHO MỘT VÀI LỚP PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TSKH. NGUYỄN MINH TRÍ

Thái nguyên - 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Tác giả

Phạm thị Thủy

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của PGS. TSKH. Nguyễn Minh Trí. Thầy đã truyền cho tác giả kiến thức, kinh nghiệm học tập và nghiên cứu khoa học. Với tấm lòng tri ân sâu sắc, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đối với thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em nghiên cứu sinh, cao học trong seminar Bộ môn Giải tích khoa Toán - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Phòng Phương trình vi phân - Viện Toán học đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học và trong cuộc sống.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Sau đại học - Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên, các Phòng Ban chức năng, Phòng Sau đại học, Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng toàn thể giáo viên trong khoa, đặc biệt là tổ Giải tích đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới những người thân và bạn bè đã giúp đỡ, động viên, khích lệ để tác giả hoàn thành luận án.

Tác giả

Phạm thị Thủy

MỤC LỤC

Một số ký hiệu trong luận án

$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ thực N chiều.
$C^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên miền Ω.
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm lũy thừa bậc p khả tích Lebesgue trên miền Ω.
∇_x	vectơ các toán tử đạo hàm $\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{N_1}}\right)$ cấp 1 theo x.
∇_y	vectơ các toán tử đạo hàm $\nabla_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_{N_2}}\right)$ cấp 1 theo y.
∇_z	vectơ các toán tử đạo hàm $\nabla_z = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_{N_3}}\right)$ cấp 1 theo z.
Δ_x	Toán tử Laplace theo biến $x : \Delta_x = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
Δ_y	Toán tử Laplace theo biến $y : \Delta_y = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$.
Δ_z	Toán tử Laplace theo biến $z : \Delta_z = \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}$.
$(.,.)$	Tích vô hướng trong không gian $L^2(\Omega)$.
$P_{\alpha,\beta}$	$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + \lvert x\rvert^{2\alpha}\lvert y\rvert^{2\beta}\Delta_z u$, với $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\lvert x\rvert^{2\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2\right)^{\alpha}$, $\lvert y\rvert^{2\beta} = \left(\sum_{j=1}^{N_2} y_j^2\right)^{\beta}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_{N_1}, \mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2...\mathrm{d}y_{N_2}, \mathrm{d}z = \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2...\mathrm{d}z_{N_3}$.
$C(X,Y)$	không gian các ánh xạ liên tục từ X vào Y.
$C^1(X,Y)$	không gian các ánh xạ khả vi Fréchet liên tục từ X vào Y.

Mở đầu

.

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán biên luôn là chủ đề nghiên cứu được nhiều chuyên gia quan tâm bởi những ứng dụng rộng rãi của nó trong các ngành vật lý, hóa học và sinh học. Đặc biệt là việc nghiên cứu điều kiện tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán biên có chứa toán tử elliptic suy biến là khó, phức tạp. Do vậy các kết quả đạt được chiếm vị trí quan trọng trong phát triển lý thuyết toán học. Với các lý do nêu trên chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là "Bài toán biên cho một vài lớp phương trình có chứa toán tử elliptic suy biến mạnh".

2. Mục đích của đề tài luận án

2.1 Mục đích quan trọng thứ nhất

Mục đích quan trọng thứ nhất của luận án là chỉ ra được số mũ tới hạn của định lý nhúng cho không gian Sobolev có trọng liên kết với toán tử elliptic suy biến mạnh. Từ kết quả đó chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên có chứa phương trình elliptic suy biến mạnh nửa tuyến tính.

2.2 Mục đích quan trọng thứ 2

Là đưa ra được đồng nhất thức kiểu Pohozaev, từ đó chúng tôi chứng minh được sự không tồn tại nghiệm không tầm thường cho bài toán biên đối với phương trình elliptic suy biến mạnh nửa tuyến tính.

2.3 Mục đích quan trọng thứ 3

Chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm, sự tồn tại nghiệm toàn cục, sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán biên ban đầu có chứa phương trình parabolic nửa tuyến tính có toán tử elliptic suy biến mạnh trong hai trường hợp: số hạng phi tuyến có độ tăng nhỏ hơn độ tăng tới hạn và số hạng phi tuyến có độ tăng tuỳ ý.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là xét bài toán biên và bài toán biên giá trị ban đầu có chứa toán tử elliptic suy biến mạnh

$$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2\alpha}|y|^{2\beta}\Delta_z u, \text{ với } \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0.$$

4. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi thu thập, tổng hợp, vận dụng các kiến thức liên quan tới đề tài nghiên cứu. Luận án sử dụng các phương pháp biến đổi tích phân, phương pháp biến phân, các phương pháp chứng minh trong lý thuyết của các bài toán biên suy biến phi tuyến với sự điều chỉnh phù hợp cho lớp toán tử $P_{\alpha,\beta}$. Ngoài ra còn sử dụng phương pháp điểm bất động để chứng minh cho sự tồn tại nghiệm toàn cục và tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi phương trình parabolic với các điều kiện thích hợp trong trường hợp hệ gradient và phương pháp Galerkin trong trường hợp hệ không gradient.

5. Tổng quan về đề tài luận án

Từ buổi sơ khai của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng người ta đã quan tâm tới tính chất định tính của nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đạo hàm riêng, trong đó độ trơn và tính giải tích được nhiều nhà toán học quan tâm đặc biệt. Độ trơn của nghiệm được mô tả trong các lớp toán tử elliptic. Đặc biệt là toán tử Grushin

$$G_k u = \Delta_x u + |x|^{2k}\Delta_y u \text{ với } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}, N_1, N_2 \geq 1, k \in Z_+,$$

trong [27] nhà toán học người Nga Grushin đã đạt được các kết quả đáng kể.

- Nếu $k = 0$ thì G_0 là elliptic trong miền Ω.
- Nếu $k > 0$ thì G_k không là elliptic trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ có giao khác rỗng với mặt $x = 0$.

Nhà toán học Grushin đã chứng minh được nếu $G_k u$ là hàm khả vi vô hạn trong miền Ω thì u cũng khả vi vô hạn trong miền Ω và các tính chất địa phương của G_k được tác giả nghiên cứu khá đầy đủ trong [27]. Như chúng ta đã biết, một trong những toán tử elliptic được nghiên cứu nhiều đó là toán tử Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm, hay không tồn tại nghiệm của bài toán biên nửa tuyến tính chứa toán tử Laplace đã được nhiều nhà toán học tập trung nghiên cứu bắt đầu từ nửa thế kỷ thứ hai mươi.
Trong công trình [35] (1965), S. Pohozaev đã xét bài toán biên

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

với Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$,

$$f(u) = \lambda u + |u|^{p-1} u.$$

Kết quả đạt được trong công trình này là

- Nếu $n = 2$, $1 < p < \infty$, thì bài toán (1) luôn có nghiệm không tầm thường.
- Nếu $n \geq 3$, $\lambda = 0$, $p \geq \dfrac{n+2}{n-2}$ và Ω là hình sao, thì bài toán (1) không có nghiệm dương.
- Nếu $n \geq 3$, $\lambda = 0$, $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, thì bài toán (1) có nghiệm dương.
  Bởi vậy khi $n \geq 3$ giá trị $p_0 = \dfrac{n+2}{n-2}$ là giá trị rất đặc biệt. Giá trị liên quan $p_0 + 1 = \dfrac{2n}{n-2}$ là giá trị tới hạn để ta có định lý nhúng Sobolev, p_0 được gọi là số mũ Sobolev tới hạn của bài toán (1) cho toán tử Laplace.

Đến năm 1983, hai nhà toán học H. Brezis và L. Nirenberg [16] đã công bố kết quả tồn tại nghiệm dương của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{\frac{n+2}{n-2}} \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

với Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Kết quả khẳng định rằng

- Khi $n \geq 4$ bài toán (2) có nghiệm dương nếu $0 < \lambda < \lambda_1$, với λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử Laplace ứng với điều kiện Dirichlet.
- Khi $n = 3$ điều kiện tồn tại nghiệm là $0 < \lambda^* < \lambda < \lambda_1$ khi Ω là hình cầu, $\lambda^* = \frac{1}{4}\lambda_1$.

Những kết quả mang tính tiên phong này cùng với các bài toán mở được đặt ra đã thúc đẩy hàng trăm công trình nghiên cứu sau đó (xem [6, 7, 11, 17, 39] cùng với các tài liệu tham khảo kèm theo).

Như vậy sự tồn tại nghiệm không tầm thường, tồn tại nghiệm dương của các bài toán biên chứa toán tử elliptic đạt được tương đối trọn vẹn. Một cách tương tự, các vấn đề lại được đặt ra đối với bài toán có chứa toán tử elliptic suy biến.
Vào năm 1998 trong [42, 43], N. M. Trí đã xét bài toán biên

$$\begin{cases} -L_k u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

trong đó Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^2$, $L_k u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^{2k}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $(k \geq 1)$, $f(u) = u|u|^{\gamma-1}$. Các kết quả đạt được ở đây là

- $\gamma \geq \dfrac{4}{k}$ và Ω là L_k- hình sao thì bài toán (3) không có nghiệm không tầm thường.
- $0 < \gamma < \dfrac{4}{k}$ bài toán (3) có nghiệm không tầm thường. Bởi vậy coi giá trị $\dfrac{4+k}{k}$ là số mũ Sobolev tới hạn cho toán tử L_k.