ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRIỆU THỊ MẬN

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN GIẢI CÁC BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRIỆU THỊ MẬN

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN GIẢI CÁC BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn:
TS NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Nhiều quá trình vật lý trong tự nhiên phát triển theo thời gian trên những miền mà ta có thể giải được nếu ta coi chúng có kích thước vô hạn hay nửa vô hạn. Vì lý do này, việc sử dụng biến đổi Fourier, biến đổi Laplace, biến đổi Hankel được coi là công cụ giải tích mạnh nhất để giải các phương trình đạo hàm riêng được các nhà toán học và kỹ sư nghiên cứu. Mục đích của luận văn này là để minh họa các cách sử dụng của biến đổi Fourier, biến đổi Laplace và biến đổi Hankel vào các bài toán cụ thể. Sự hình thành của luận văn được dựa trên sự tham khảo, tổng hợp trên các tài liệu tham khảo và chủ yếu là cuốn *Biến đổi tích phân* của nhóm tác giả mà đứng đầu là GS. TSKH *Đặng Đình Áng*. Điều đặc biệt quan trọng phương pháp biến đổi tích phân rất hữu hiệu đối với việc giải các bài toán của phương trình đạo hàm riêng, phương trình truyền nhiệt, phương trình truyền sóng, bài toán biên của phương trình Laplace.

Nội dung chính của luận văn bao gồm ba chương mang lại một cách nhìn khái quát về các phương pháp biển đổi và giải các phương trình đạo hàm riêng. Luận văn không đi sâu vào nghiên cứu lý thuyết về các phép biến đổi Fourier, Laplace hay Hankel mà chỉ giới thiệu các định nghĩa và tính chất cơ bản của các phép biến đổi. Trên cơ sở đó trình bày các bài toán và việc vận dụng các phép biến đổi trên để giải nghiệm.

Trong chương một, chúng tôi dành cho việc trình bày một số kiến thức bổ trợ về các không gian hàm, giới thiệu về phương pháp biến đổi Fourier thuận và nghịch để giải các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Chúng tôi cũng giới thiệu một số phương pháp giải các bài toán một cách thông thường và giải các bài toán dựa vào phương pháp biến đổi Fourier để so sánh và lựa chọn phương pháp giải tối ưu nhất.

Với mục đích tiếp tục mở rộng các phương pháp giải khác nhau cho phương trình đạo hàm riêng, trong chương hai chúng tôi giới thiệu phương pháp biến đổi Hankel. Nêu ra một số các bài toán áp dụng biến đổi Hankel vào việc tìm nghiệm của các phương trình như phương trình truyền nhiệt, phương trình Laplace, phương trình Poisson, các bài toán biên hỗn hợp...

Chương ba của luận văn chúng tôi giới thiệu về biến đổi Laplace. Vận dụng biến đổi Laplace vào tìm nghiệm của các phương trình vi phân, phương trình truyền nhiệt, phương trình đạo hàm riêng.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán - Tin, Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều

kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới TS. Nguyễn Văn Ngọc, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 04 tháng 05 năm 2013.

Người thực hiện

Triệu Thị Mận

Chương 1

BIẾN ĐỔI FOURIER

Trong chương này trình bày lý thuyết tóm tắt của biến đổi Fourier, Fourier-sin, Fourier-cosin và giải một số phương trình đạo hàm riêng, phương trình tích phân dạng chập bằng phương pháp biến đổi tích phân Fourier. Nội dung chính của chương này được hình thành từ các tài liệu [1], [2], [3], [4] và [5].

1.1 Một số kiến thức bổ trợ

1.1.1 Không gian L^p

Với p là số thực: $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ta định nghĩa $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm $f(x)$ xác định trên Ω, sao cho

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Số $\|f\|_p$ được gọi là chuẩn của hàm $f(x)$.

$L^p(\Omega)$ là một không gian Banach. Đặc biệt, $L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx,$$

trong đó $\overline{g(x)}$ là liên hợp phức của $g(x)$.

Hàm xác định trên Ω được gọi là chủ yếu bị chặn trên Ω, nếu tồn tại hằng số dương C, sao cho $|f(x)| \leqslant C$ hầu khắp nơi trên Ω. Cận dưới lớn nhất của các hằng số C được ký hiệu là $ess\sup_{x\in\Omega} |f(x)|$.

Ta ký hiệu $L^\infty(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm chủ yếu bị chặn trên Ω. Chuẩn trong $L^\infty(\Omega)$ được xác định theo công thức

$$\|f\|_\infty = esssup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

trong đó sup lấy trên tất cả các phân hoạch đơn vị của $[a, b]$.

Dưới đây là mệnh đề quan trọng về sự trù mật trong L^p.

Định lý 1.1. *(về sự trù mật)*

(i) Nếu khoảng (a, b) là hữu hạn thì các lớp hàm sau đây sẽ trù mật khắp nơi trong $L^p(a, b)$:
$M-$lớp các hàm bị chặn,
$C-$lớp các hàm liên tục,
$S-$lớp các hàm bậc thang,
$P-$lớp các đa thức đại số,
$T-$lớp các đa thức lượng giác trù mật khắp nơi trong $L^p(-\pi, \pi)$.

(ii)Lớp Sc của tất cả các hàm bậc thang trù mật trong $L^p(-\infty, \infty), (p \geqslant 1)$.

1.1.2 Các bất đẳng thức và các định lý về tích phân

Định lý 1.2 (bất đẳng thức Hölder)**.** *Nếu $f \in L^p$, $g \in L^q$, trong đó $p, q \geqslant 1$, thì*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Định lý 1.3 (bất đẳng thức Minkowski)**.** *Nếu $p \geqslant 1$, thì*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Định lý 1.4 (Định lý Lebesgue)**.** *Giả sử trên Ω cho dãy các hàm khả tổng $\{f_k(x)\}_1^\infty$ hội tụ hầu khắp nơi đến hàm $f(x)$. Nếu tồn tại hàm thực $F(x) \geqslant 0$, $F(x) \in L^1(\Omega)$, sao cho $|f_k(x)| \leqslant F(x)$, $x \in \Omega$, $\forall k$ thì $f(x) \in L^1(\Omega)$ và $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)\, dx$.*

Định lý 1.5 (Định lý Fubini)**.** *Cho $F(x, y)$ khả tích trên $\Omega_1 \times \Omega_2$. Khi đó $x \to \int_{\Omega_2} F(x, y)dy$ khả tích trên Ω_1, $y \to \int_{\Omega_1} F(x, y)dx$ khả tích trên Ω_2. Ngoài ra*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} F(x, y)\, dy = \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} F(x, y\, dx = \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x, y)\, dxdy.$$

1.1.3 Biến phân bị chặn

Định nghĩa 1.1. *Cho f là hàm số (thực hoặc phức) xác định trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $p = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ là một phân hoạch của đoạn $[a, b]$, nghĩa là $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Hàm số $f(x)$ được gọi là có biến phân bị chặn trên đoạn $[a, b]$, nếu*

$$V(f) = V_a^b(f) = \sup_p \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty.$$

Ví dụ về biến phân bị chặn

1) Nếu $f(x)$ là hàm thực đơn điệu trên $[a, b]$, thì $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

2) Nếu $|f'(x)| \leqslant M, \forall x \in [a, b]$ thì $V_a^b(f) \leqslant M(b - a)$.

3) Nếu f là hàm liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$, nghĩa là có dạng $f(x) = c + \int_a^x g(t)dt,\ g \in L^1(a, b)$, thì $V_a^b \leqslant \|g\|_{L^1_{(a,b)}}$.

∗ **Các tính chất của hàm có biến phân bị chặn**

1) Hàm nhận giá trị phức biến thực $f(x)$ có biến phân bị chặn trên $[a, b]$, khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của nó có biến phân bị chặn trên $[a, b]$.

2) Nếu $f(x)$ có biến phân bị chặn thì $f(x)$ bị chặn: $|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f)$.

3) Giả sử $f(x)$ là hàm số thực. Hàm $f(x)$ có biến phân bị chặn trên $[a, b]$ khi và chỉ khi nó là hiệu hàm đơn điệu tăng và bị chặn trên $[a, b]$:

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

1.1.4 Tích phân Riemann và tích phân Dirichlet

Bổ đề 1.1 (Bổ đề Riemann). *Nếu $g(t)$ khả tích tuyệt đối trên khoảng hữu hạn hoặc vô hạn $[a, b]$, thì*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b g(t) \sin pt\, dt = 0, \quad \lim_{p\to\infty} \int_a^b g(t) \cos pt\, dt = 0.$$

Định lý 1.6 (Bổ đề Dirichlet). *Nếu hàm $g(t)$ đơn điệu tăng và bị chặn trên đoạn $[o, h]$, $h > 0$, thì*

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} g(+0).$$

Định lý 1.7 (Tích phân Dirichlet).

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} sgn\lambda.$$

1.2 Biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R})$

1.2.1 Định nghĩa biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R})$

Định nghĩa 1.2. *Với $f \in L^1(\mathbb{R})$ ta định nghĩa biến đổi Fourier của hàm f là:*

$$\hat{f}(\xi) = F[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

và biến đổi Fourier ngược của f là:

$$\check{f}(\xi) = F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi}\, dx. \tag{1.2}$$

Nhận xét rằng vì $f \in L^1(\mathbb{R})$ và $|e^{\pm i\xi}| = 1$, nên các tích phân (1.1) và (1.2) hội tụ $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Ngoài ra, giữa biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược có quan hệ sau:

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(-\xi), \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \frac{1}{2\pi}F[f(-x)](\xi). \tag{1.3}$$

Ví dụ 1.1 (Hạch Dirichlet). *Xét biến đổi Fourier của hàm đặc trưng $\chi_{[-N,N]}(x)$. Ta có:*

$$\hat{\chi}_{[-N,N]}(\xi) = \int_{-N}^{N} e^{ix\xi}\,dx = \frac{2\sin N\xi}{\xi}.$$

Hàm số $D_N(x) = \dfrac{\sin N\xi}{\xi}$ được gọi là hạch Dirichlet và có liên quan đến tích phân sau đây:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2} sign\lambda.$$

Ví dụ 1.2 (Hạch Poisson). *Xét biến đổi Fourier của hàm số $e^{-t|x|}, t > 0$. Ta có:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|x|}e^{-ix\xi}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-tx}\cos x\xi\,dx.$$

Thực hiện tính toán ta được

$$I = \frac{2t}{t^2 + \xi^2}, \quad t > 0.$$

Hàm số $P_t(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{t}{t^2 + x^2}, \quad t > 0$ được gọi là hạch Poisson.

1.2.2 Các tính chất cơ bản của biến đổi Fourier

Sau đây là một số tính chất cơ bản của biến đổi Fourier

1) Biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược là hàm bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, theo (1.1) ta có:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_1.$$

2) $\hat{f}(\xi) = F[f](\xi)$ là hàm liên tục trong $\mathbb{R}$. Thật vậy, với $\xi, h \in \mathbb{R}$, ta có:

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-ix\xi}||e^{-ixh} - 1|\,dx \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = 2\|f\|_1.$$

Theo định lý Lebesque, ta có:

$$\lim_{h\to 0} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-ix\xi}||e^{-ixh} - 1|\,dx$$