ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ NA

VỀ TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2013
Người viết Luận văn

Nguyễn Thị Na

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của GS. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K19 (2011- 2013) Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2013

Người viết Luận văn

Nguyễn Thị Na

Mục lục

Mở đầu

Toán tử đơn điệu là một trong những lĩnh vực của giải tích hiện đại đã và đang được nhiều nhà toán học hàng đầu thế giới nghiên cứu, đặc biệt phải kể đến như Browder F.E, Rockafellar R.T, Minty G.J.... Bên cạnh các kết quả đặc biệt có ý nghĩa về mặt lý thuyết, toán tử đơn điệu là một trong những công cụ được sử dụng nhiều và rất có hiệu quả trong lĩnh vực toán ứng dụng chẳng hạn như bất đẳng thức biến phân. Nó giúp ích cho việc nghiên cứu ánh xạ dưới gradient và gradient, chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm cho rất nhiều các lớp bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu.

Đề tài của luận văn là về toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert thực và ứng dụng của nó trong việc khảo sát bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại và một số bài toán có liên quan. Vì thế đây là một đề tài vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết, đồng thời vừa có ý nghĩa thực tiễn cao.

Nội dung của bản luận văn được trình bày trong ba chương. Chương 1 giới thiệu một cách hệ thống lại các định nghĩa, ví dụ và một số tính chất quan trọng của không gian Hilbert thực. Chương 2 gồm hai phần chính. Phần thứ nhất nêu lên định nghĩa và giới thiệu các tính chất cơ bản của toán tử đơn điệu. Phần thứ hai trình bày về tổng của hai toán tử đơn điệu cực đại. Chương 3 giới thiệu bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại và hai trường hợp riêng quan trọng là bài toán cực tiểu hàm lồi và bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, cuối chương nêu thuật toán điểm gần kề và khảo sát sự hội tụ tới nghiệm của thuật toán này trong việc giải bài toán bao hàm thức đơn điệu cực đại.

Chương 1

Các kiến thức về không gian Hilbert

Các không gian Hilbert là những trường hợp riêng quan trọng của không gian Banach (hay còn gọi là không gian tuyến tính định chuẩn đầy đủ với chuẩn kí hiệu là $||.||$, xem [2], [4]) và là một không gian hữu ích, dễ thao tác trong các áp dụng của giải tích hàm tuyến tính vào lý thuyết và kĩ thuật. Trong chương này ta nhắc lại một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert trên trường số thực $\mathbb{R}$. Các kiến thức trong chương được lấy từ các tài liệu [2], [4], [7].

1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1. *Cho $\mathcal{H}$ là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong $\mathcal{H}$ là một ánh xạ*

$$\begin{aligned}\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \langle x,y \rangle\end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây

1. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle, \forall x,y \in \mathcal{H}$;
2. $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle, \forall x,y,z \in \mathcal{H}$;
3. $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle, \forall x,y \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\langle x,x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$ *và* $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Số $\langle x,y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x, y trong $\mathcal{H}$.

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa suy ra

1. $\langle x,\lambda y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$,
2. $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$,

3. $\langle x, 0\rangle = 0$,

với mọi $x, y, z \in \mathcal{H}$ và $\lambda \in K$.

Ví dụ 1.1. *Với* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *biểu thức*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

xác định một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. *Cặp* $(\mathcal{H}, \langle ., .\rangle)$, *trong đó* $\mathcal{H}$ *là một không gian tuyến tính trên* $\mathbb{R}$, $\langle ., .\rangle$ *là tích vô hướng trên* $\mathcal{H}$ *được gọi là không gian tiền Hilbert thực.*

Định lý 1.1. *(Bất đẳng thức Cauchy- Schwarz)*

Trong không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$, *với mọi* $x, y \in \mathcal{H}$ *ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle \tag{1.1}$$

Chứng minh. Với $y = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Giả sử $y \neq 0$, khi đó với mọi số $\lambda \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \ge 0,$$

tức là

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle \ge 0$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ ta được

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle.$$

Định lý được chứng minh. □

Chú ý 1.1. Dấu bằng trong bất đẳng thức Schwarz xảy ra khi và chỉ khi x và y phụ thuộc tuyến tính.

Mối quan hệ giữa khái niệm chuẩn và tích vô hướng được thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.2. *(xem [4]) Mọi không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ đều là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Nhận xét 1.2. Với kí hiệu mới này, bất đẳng thức Schwarz được viết lại thành

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||. \tag{1.3}$$

Như vậy một không gian tiền Hilbert xem như không gian định chuẩn có thể đầy đủ hoặc không đầy đủ.

Định nghĩa 1.3. *Nếu $\mathcal{H}$ là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi* (1.2) *thì $\mathcal{H}$ được gọi là không gian Hilbert thực.*

Ví dụ 1.2. $\mathbb{R}^n$ *là không gian Hilbert thực với tích vô hướng*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

trong đó

$$x = (x_1, x_2 \ldots, x_n), y = (y_1, y_2 \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

và chuẩn cảm sinh

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Ví dụ 1.3. *Không gian*

$$l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}$$

là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

và chuẩn cảm sinh

$$||x|| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

với mọi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.

Ví dụ 1.4. *Gọi $C[a,b]$ là tập tất cả các hàm giá trị thực liên tục trên khoảng đóng hữu hạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

Trong $C[a,b]$ xét tích vô hướng

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)dt, \quad x(t), y(t) \in C[a,b].$$

Khi đó

- *Không gian $C[a,b]$ với chuẩn*

$$||x|| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$$

  là không gian Banach nên $C[a,b]$ là không gian Hilbert.

- *Nhưng không gian $C[a,b]$ với chuẩn*

$$||x|| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

  lại không phải là không gian Banach nên nó không phải là không gian Hilbert.

1.2 Một số tính chất quan trọng

Định lý 1.3. *Giả sử $(x_n)_n, (y_n)_n$ là hai dãy hội tụ đến x_0, y_0 trong không gian tiền Hilbert thực $\mathcal{H}$, khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle.$$

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ trong không gian $\mathcal{H}$.

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$ trong $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle + \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &\le |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\le ||x_n||.||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0||.||y_0||. \end{aligned}$$

Vì dãy $(x_n)_n$ hội tụ trong $\mathcal{H}$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $||x_n|| \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \le M||y_n - y_0|| + ||x_n - x_0||.||y_0||.$$

Cho $n \to \infty$ suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 1.3. Định lý trên cho thấy tích vô hướng là một hàm liên tục xác định trên $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Định lý 1.4. *Với mọi x, y thuộc không gian tiền Hilbert $\mathcal{H}$ ta luôn có đẳng thức hình bình hành sau*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{1.4}$$

Chứng minh. Với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, ta có

$$||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle,$$

$$||x-y||^2 = \langle x-y, x-y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle.$$

Cộng hai đẳng thức trên ta được đẳng thức (1.4). $\square$

Áp dụng đẳng thức hình bình hành cho hai véc tơ $x-y$ và $x-z$ ta có hệ quả sau

Hệ quả 1.1. *Giả sử $\mathcal{H}$ là một không gian tiền Hilbert và $x, y, z \in \mathcal{H}$. Khi đó, ta có đẳng thức Apollonius*

$$2\left(||x-y||^2 + ||x-z||^2\right) = 4||x - \frac{y+z}{2}||^2 + ||y-z||^2.$$

Nhận xét 1.4

1. Đẳng thức (1.4) nói lên một tính chất hình học, tổng bình phương các cạnh của hình bình hành bằng tổng bình phương hai đường chéo.

2. Từ định lý trên ta thấy, muốn đưa được tích vô hướng vào một không gian định chuẩn thì không gian này phải thỏa mãn điều kiện hình bình hành. Ngược lại nếu $\mathcal{H}$ là một không gian định chuẩn trong đó đẳng thức hình bình hành được thỏa mãn với mọi phần tử thuộc $\mathcal{H}$ thì trên $\mathcal{H}$ sẽ tồn tại một tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ sao cho chuẩn này được xác định nhờ tích vô hướng. Điều này được thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.5. *Giả sử $(\mathcal{H}, ||.||)$ là một không gian định chuẩn trên $\mathbb{R}$ trong đó đẳng thức hình bình hành nghiệm đúng với mọi $x, y \in \mathcal{H}$, tức là*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$