ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MẠC QUỐC NHẬT

ĐIỂM NGUYÊN VÀ TÍNH HYPERBOLIC CỦA PHẦN BÙ CÁC SIÊU MẶT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

MẠC QUỐC NHẬT

ĐIỂM NGUYÊN VÀ TÍNH HYPERBOLIC CỦA PHẦN BÙ CÁC SIÊU MẶT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TSKH. TRẦN VĂN TẤN

Thái Nguyên - Năm 2013

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới dự hướng dẫn khoa học của PGS. TSKH. Trần Văn Tấn. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, PGS. TSKH. Trần Văn Tấn, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, khoa Sau đại học - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán k19a, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Do thời gian ngắn và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2013

Tác giả

Mạc Quốc Nhật

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Một trong những vấn đề cơ bản nhất của lý thuyết số là nghiên cứu các nghiệm nguyên và nghiệm hữu tỷ của các phương trình Diophantine.

Cho $f(x, y)$ là một đa thức thuần nhất với các hệ số nguyên và tồn tại một trường mở rộng nào đó để khi phân tích $f(x, y)$ trên trường đó thì có ít nhất ba cặp nhân tử phân biệt không tỷ lệ tuyến tính.

Năm 1909, Thue chứng minh rằng với số nguyên $b \neq 0$ tùy ý, *phương trình Diophantine*

$$f(x, y) = b(*)$$

chỉ có hữu hạn các nghiệm nguyên. Phương trình (*) gọi là phương trình Thue và kết quả của Thue được xem là phát hiện quan trọng nhất của lý thuyết số.

Không chỉ dừng lại ở đa thức thuần nhất hai biến, Schmidt đã tổng quát sang trường hợp nhiều biến. Schmidt đã xét cho trường hợp phương trình $f_1...f_r = g$, với $f_j (j = 1, ..., r)$ là các dạng tuyến tính thuần nhất bậc nhất n biến và g là hằng số. Hơn nữa, Schmidt [22] đã chứng minh cho trường hợp f_j là các dạng tuyến tính n biến và bậc của đa thức g nhỏ hơn $r - n$.

Câu hỏi về số nghiệm nguyên của phương trình Diophantine có mối quan hệ sâu sắc giữa Xấp xỉ Diophantine và Lý thuyết Nevanlinna liên tục thu hút được sự quan tâm của đông đảo các nhà toán học. Chính vì vậy, chúng tôi chọn đề tài "Điểm nguyên và tính hyperbolic của phần bù các siêu mặt" thuộc hướng nghiên cứu nói trên.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến điểm nguyên và tính hyperbolic của phần bù các siêu mặt. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu về vấn đề này.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu về một lớp các phương trình Diophantine ứng với đa thức thuần nhất dưới dạng tích và tìm hiểu về tính hyperbolic của phần bù của các siêu mặt trong không gian xạ ảnh. Cụ thể, chúng tôi đọc hiểu và trình bày lại một cách tường minh bài báo "Integral points and the hyperbolicity of the complement of hypersurfaces", của Min Ru trên J. reine angew. Math. năm 1993.[17]

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Số nghiệm nguyên của phương trình Diophantine.

Chương 3: Tính hyperbolic của phần bù các siêu mặt trong không gian xạ ảnh phức n chiều.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số tính chất cơ bản của không gian xạ ảnh, định giá, các siêu mặt ở vị trí tổng quát, đa tạp hyperbolic theo nghĩa Brody và những kiến thức liên quan khác nhằm giúp cho người đọc dễ theo dõi. Các khái niệm và kết quả của chương này được trích dẫn từ [1], [2], [3], [4],...

1.1 Không gian xạ ảnh

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathbb{K}$ là một trường. *Không gian xạ ảnh n* chiều trên $\mathbb{K}$, ký hiệu là $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, hay đơn giản $\mathbb{P}^n$ là tập hợp các lớp tương đương của bộ $(a_0, ..., a_n)$ các phần tử của $\mathbb{K}$, không đồng thời bằng không theo quan hệ tương đương $(a_0, ..., a_n) \sim \lambda(a_0, ..., a_n)$ với mọi λ thuộc $\mathbb{K}\setminus \{0\}$. Mỗi phần tử của $\mathbb{P}^n$ được gọi là một điểm.

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử T là một họ các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$. Tập
$\mathcal{Z} = \{P \in \mathbb{P}^n \,|\, f(P) = 0 \text{ với mọi } f \in T\}$
được gọi là *tập không điểm* của họ các đa thức thuần nhất của vành $\mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$. Tập không điểm của một đa thức thuần nhất F được gọi là một *siêu mặt* xác định bởi F. Đặc biệt, nếu F là đa thức thuần nhất bậc một thì siêu mặt $\mathcal{Z}(F)$ được gọi là siêu phẳng xác định bởi F.

Định nghĩa 1.1.3. Tập con Y của $\mathbb{P}^n$ được gọi là một *tập đại số* nếu tồn tại họ các đa thức thuần nhất T của $\mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$ sao cho $Y = \mathcal{Z}(T)$.

Mệnh đề 1.1.4. (i) *Hợp của hai tập đại số là một tập đại số.*
(ii) *Giao của một họ tùy ý những tập đại số là tập đại số.*
(iii) *Tập hợp rỗng và toàn bộ không gian là những tập đại số.*

Định nghĩa 1.1.5. Trên $\mathbb{P}^n$ xác định tô pô với các tập mở là phần bù của các tập đại số được gọi là *tô pô Zariski.*

Định nghĩa 1.1.6. Một tập con khác rỗng Y của không gian tô pô X được gọi là *khả quy* nếu nó biểu diễn thành hợp của hai tập con đóng thực sự trong Y. Trái lại, Y được gọi là *bất khả quy.*

Định nghĩa 1.1.7. *Đa tạp đại số xạ ảnh* (hay đơn giản đa tạp xạ ảnh) là một tập con đóng, bất khả quy trong $\mathbb{P}^n$.

Định nghĩa 1.1.8. Giả sử Y là một tập con của $\mathbb{P}^n$. Iđêan
$I(Y) := \{\ f \in \mathbb{K}[\mathrm{X}_0, ..., X_n] \,|f$ là đa thức thuần nhất và $f(P) = 0$ với mọi $P \in Y\ \}$ được gọi là *iđêan thuần nhất* của Y trong $\mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$.

Định nghĩa 1.1.9. Giả sử X là một không gian tô pô. *Chiều của* X là supermum của tất cả các số nguyên n sao cho tồn tại một dãy $Z_1 \subset ... \subset Z_n$ của các tập con phân biệt, đóng, bất khả quy của X. Chiều của đa tạp W được xác định là chiều của không gian tô pô cảm sinh trên W.

Ví dụ 1.1.10. Chiều của $\mathbb{P}^n$ bằng n.

Mệnh đề 1.1.11. *Một siêu mặt bất khả quy trong* $\mathbb{P}^n$ *có* $n-1$ *chiều.*

Định nghĩa 1.1.12. Một đa tạp $r-$ chiều Y trong $\mathbb{P}^n$ được gọi là *giao đầy đủ* nếu iđêan thuần nhất $I(Y)$ của Y được sinh bởi $n-r$ đa thức thuần nhất.

Định nghĩa 1.1.13. Giả sử Y là tập đại số $\mathbb{P}^n$. Vành $S(Y) = \mathbb{K}[X_0, ..., X_n]/\mathrm{I(Y)}$ được gọi là *vành tọa độ thuần nhất* của Y.

Mệnh đề 1.1.14. (i) *Nếu a là iđêan sinh bởi họ các đa thức thuần nhất* T *thì* $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(a)$

(ii) Nếu $T_1 \subseteq T_2$ *là các tập con của vành đa thức* $\mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$ *thì* $\mathcal{Z}(T_2) \subseteq \mathcal{Z}(T_1)$
(iii) Nếu $Y_1 \subseteq Y_2$ *là các tập con của* $\mathbb{P}^n$ *thì* $I(Y_1) \subseteq I(Y_2)$.
(iv) Nếu Y_1, Y_2 *là các tập con của* $\mathbb{P}^n$ *thì* $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
(v) Nếu Y *là tập con của* $\mathbb{P}^n$ *thì* $\mathcal{Z}(I(Y)) = \overline{Y}$ *(bao đóng của* Y*).*

Mệnh đề 1.1.15. *Một tập đại số* $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ *là bất khả quy khi và chỉ khi* $I(Y)$ *là iđêan nguyên tố.*

Mệnh đề 1.1.16. *Cho* X *là một đa tạp xạ ảnh của* $\mathbb{P}^n$ *và* $f \in \mathbb{K}[X_0, ..., X_n]$ *là đa thức thuần nhất khác hằng không triệt tiêu hoàn toàn trên* X*. Khi đó* $\dim(X \cap Z(f)) = \dim X - 1$.

Hệ quả 1.1.17. *Giả sử* $\overline{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{P}^n$ *là giao đầy đủ* $r-$ *chiều không chứa siêu phẳng tại vô cực* $X_0 = 0$*. Khi đó giao của* $\overline{\mathcal{Z}}$ *với siêu phẳng* $X_0 = 0$ *là một đa tạp* $(r-1)$ *chiều .*

Mệnh đề 1.1.18. *Giả sử* $\mathbb{K}$*. Khi đó* $\dim \mathbb{K}[X_1, ..., X_n] = n$.

1.2 Giá trị tuyệt đối

Định nghĩa 1.2.1. Cho $\mathbb{K}$ là một trường. Ánh xạ $|.|_v : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$ được gọi là giá trị tuyệt đối trên trường $\mathbb{K}$ nếu thỏa mãn các điều kiện sau:
(i) $|x|_v \geqslant 0$, với mọi $x \in \mathbb{K}$;
(ii) $|x|_v = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
(iii) $|xy|_v = |x|_v |y|_v$, với mọi $x, y \in \mathbb{K}$;
(iv) $|x + y|_v \leqslant |x|_v + |y|_v$, với mọi $x, y \in \mathbb{K}$.
Nếu thay điều kiện (iv) bằng điều kiện mạnh hơn
(v) $|x + y|_v \leqslant \max(|x|_v, |x|_v)$, với mọi $x, y \in \mathbb{K}$ thì $|.|_v$ được gọi là *giá trị tuyệt đối không Acsimet*. Giá trị tuyệt đối mà $|x|_v = 1$ với mỗi $x \in \mathbb{K}^*$ được gọi là *giá trị tuyệt đối tầm thường.*

Ví dụ 1.2.2. Cho $\mathbb{K}$ là một trường số bất kỳ và các phép nhúng

$$\sigma_1 : \mathbb{K} \to \mathbb{R}.$$

$$\sigma_2 : \mathbb{K} \to \mathbb{C}.$$

Khi đó ánh xạ

$$|.|_v : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$$

Xác định bởi với mọi $a \in \mathbb{K}$, $|a|_v = |\sigma_1(a)|$ hoặc $|a|_v = |\sigma_2(a)|^2$ là các giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{K}$ và tương ứng được gọi là các *giá trị tuyệt đối thực hoặc phức.*

Nhận xét 1.2.3. Một giá trị tuyệt đối $|.|_v$ trên $\mathbb{K}$ xác định một metric trên $\mathbb{K}$ với hàm khoảng cách $d(x, y) = |x - y|_v$. Do đó xác định trên $\mathbb{K}$ một tô pô. Tô pô xác định bởi giá trị tuyệt đối $p-adic$ được gọi là *tô pô* $p-adic$

Mệnh đề 1.2.4. *Cho $\mathbb{K}$ là một trường cùng với giá trị tuyệt đối không Acsimet $|.|_v$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n \in k, |a_i|_v < |\alpha_1|_v$, với mọi $i > 1$. Khi đó,*
(i) $|1| = 1, |-1| = 1, |-x| = |x|$, với mọi $x \in \mathbb{K}$;
(ii) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right|_v = |\alpha_1|_v$;
(iii) nếu chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ hội tụ thì $\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right|_v = |\alpha_1|_v$.

Mệnh đề 1.2.5. *Cho các giá trị tuyệt đối $|.|_1, |.|_2$ trên $\mathbb{K}$ với $|.|_1$ không tầm thường . Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*
(i) $|.|_1, |.|_2$ cùng xác định một tô pô trên $\mathbb{K}$;
(ii) nếu $|\alpha|_1 < 1$ thì $|\alpha|_2 < 1$, với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$;
(iii) tồn tại số $\lambda > 0$ sao cho $|\alpha|_1 = |\alpha|_2^{\lambda}$, với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$.

Định nghĩa 1.2.6. Hai giá trị tuyệt đối gọi là *tương đương* nếu chúng thỏa mãn một trong các điều kiện của mệnh đề 1.2.5

Định lý 1.2.7. *(Định lý Ostrowski) Giả sử $|.|$ là giá trị tuyệt đối không tầm thường trên $\mathbb{Q}$. Khi đó,*
(i) Nếu $|.|$ là một giá trị tuyệt đối Acsimet thì $|.|$ tương đương với giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbb{Q}$.
(ii) Nếu $|.|$ là một giá trị tuyệt đối không Acsimet thì $|.|$ tương đương với một giá trị tuyệt đối $p-adic$.