ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HỒNG NHUNG

GIẢ THUYẾT GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH SMALE

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số : 60 46 01 12

Người hướng dẫn khoa học

PGS. TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2013

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Khi nghiên cứu độ phức tạp tính toán và tính hiệu quả của thuật toán Newton giải phương trình đa thức, S. Smale đã chứng minh

Bất đẳng thức Smale (Smale, 1981) *Giả sử* $p(z)$ *là một đa thức phức bậc* $d \geq 2$ *với các điểm tới hạn là* $z_j,\ j = 1,2,...,d-1$. *Nếu* z *không phải là điểm tới hạn của* $p(z)$ *thì* $\min\limits_{j=1,...,d-1}\left|\dfrac{p(z)-p(z_j)}{(z-z_j)}\right| \leq 4\left|p'(z)\right|.$

Từ đây ta có

Bài toán *Tìm hệ số* $K(d)$ *nhỏ nhất* (*không phụ thuộc vào* p *mà chỉ phụ thuộc vào bậc* d *của* p) *sao cho* $\min\limits_{j=1,...,d-1}\left|\dfrac{p(z)-p(z_j)}{(z-z_j)}\right| \leq K(d)\left|p'(z)\right|.$

Và S. Smale đã đưa ra

Giả thuyết giá trị trung bình Smale *Giả sử* $p(z)$ *là một đa thức bậc* $d \geq 2$ *với các điểm tới hạn là* z_j. *Nếu* z *không phải là điểm tới hạn của* $p(z)$ *thì* $\min\limits_{j=1,...,d-1}\left|\dfrac{p(z)-p(z_j)}{(z-z_j)}\right| \leq K(d)\left|p'(z)\right|,$ *với* $K(d)=1$ *hoặc* $K(d) = \dfrac{d-1}{d}.$

Tuy đã được phát biểu cách đây hơn 30 năm, Giả thuyết giá trị trung bình Smale mới chỉ chứng minh được cho các trường hợp $d = 2,3,4$ hoặc cho một số lớp đa thức đặc biệt. Mặc dù vậy, Giả thuyết Smale đã thu hút được sự quan tâm của đông đảo các nhà nghiên cứu, nhiều vấn đề và giả thuyết mới nảy sinh. Có thể kể đến:

Mở rộng Giả thuyết Smale, Quan hệ giữa Giả thuyết Smale với động học phức và tập Julia, Quan hệ giữa Giả thuyết Smale với các vấn đề của toán học tính toán,…
Mục đích của luận văn này là trình bày tổng quan các kết quả đã đạt được trong Giả thuyết Smale. Luận văn gồm hai Chương.
Chương 1 phát biểu các dạng khác nhau của Giả thuyết Smale, chứng minh chi tiết các công thức đánh giá và các định lí chứng minh Giả thuyết Smale cho các lớp đa thức thỏa mãn một số tính chất nào đó.
Chương 2 trình bày quan hệ giữa Giả thuyết Smale với một số vấn đề khác: Giải tích số, Động học phức và các mở rộng của Giả thuyết Smale.

Khi sắp xếp các kết quả, chúng tôi cố gắng làm rõ bức tranh Giả thuyết Smale, chứng minh các định lí được giải mã và làm sáng tỏ hơn. Thí dụ, chứng minh Định lí 1.11 được tách thành hai trường hợp, $d=3$ và $d\geq 4$. Nhiều tính toán trong chứng minh được trình bày chi tiết hơn là trong các tài liệu gốc.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình và nghiêm túc của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được bày tỏ lòng biết ơn tới người Thày, đã không chỉ hướng dẫn khoa học, mà còn động viên và khích lệ tác giả say mê học tập và nghiên cứu.

Xin bày tỏ lòng biết ơn Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã trang bị cho tôi những kiến thức toán học trong thời gian học Cao học.

Xin được cám ơn Trường Trung học Phổ thông Hoàng Su Phì, Hà Giang, nơi tôi công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành nhiệm vụ.

Xin được cám ơn Gia đình, bạn bè đã động viên, giúp đỡ, hi sinh và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học Cao học và viết Luận văn.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Hồng Nhung

Chương 1

GIẢ THUYẾT GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH SMALE

1.1 Phát biểu Giả thuyết giá trị trung bình Smale

Cho $p(z)$ là một đa thức bậc d với các hệ số phức. Nếu $p(z_0) = 0$ thì z_0 được gọi là *nghiệm* hoặc *không điểm* của $p(z)$. Nếu ζ là nghiệm của đa thức đạo hàm, tức là $p'(\zeta) = 0$, thì điểm ζ được gọi là *điểm tới hạn* hay *điểm dừng* của đa thức $p(z)$. Giá trị $\omega = p(\zeta)$ với ζ là điểm tới hạn được gọi là *giá trị tới hạn*. Đa thức bậc nhất $p(z) = az + b$ với $a \neq 0$ có $p'(z) = a \neq 0$ nên $p(z) = az + b$ không có điểm tới hạn. Vì vậy, từ nay về sau ta luôn giả thiết $p(z)$ là đa thức có bậc d với $d \geq 2$.

Giả thuyết giá trị trung bình của S. Smale xuất phát từ định lí sau.

Định lí 1.1 (Smale, 1981, [35]) *Giả sử $p(z)$ là một đa thức bậc $d \geq 2$ với các điểm tới hạn là z_j, $j = 1, 2, ..., d-1$. Nếu z không phải là điểm tới hạn của $p(z)$ thì*

$$\min_{j=1,...,d-1} \left| \frac{p(z) - p(z_j)}{(z - z_j)} \right| \leq 4\left|p'(z)\right|. \tag{1.1}$$

Bất đẳng thức (1.1) thường được gọi là *Bất đẳng thức Smale*.

Bất đẳng thức (1.1) cho đánh giá của đạo hàm $p'(z)$ của đa thức $p(z)$ tại điểm z thông qua "cát tuyến" nối hai điểm $(z, p(z))$ và $(z_j, p(z_j))$ trên đồ thị của $p(z)$. Vì vậy, theo một nghĩa nào đó, bất đẳng thức (1.1) là một phát biểu tương tự của Định lí giá trị trung bình Lagrange. Tuy nhiên, cũng cần lưu ý là, Định lí Giá trị trung bình Lagrange $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)$ cho đánh giá hệ số góc $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ của cát tuyến thông qua đạo hàm tại một điểm $\xi \in (a,b)$ nào đó.

Từ Định lí 1.1, S. Smale đã đi đến

Bài toán 1 *Tìm hệ số* $K(d)$ *nhỏ nhất* (*không phụ thuộc vào* p *mà chỉ phụ thuộc vào bậc* d *của* p) *sao cho với mọi đa thức phức* $p(z)$ *có bậc* d *ta có*

$$\min_{j=1,\dots,d-1}\left|\frac{p(z)-p(z_j)}{(z-z_j)}\right| \le K(d)\left|p'(z)\right|. \tag{1.2}$$

Bài toán này đã được S. Smale đặt ra (1981, [35]) khi nghiên cứu độ phức tạp tính toán và tính hiệu quả của thuật toán Newton giải gần đúng phương trình đa thức, nó được M. Shub và S. Smale (1986, [34]) cùng nhiều tác giả khác nghiên cứu và phát triển (xem Tài liệu tham khảo). Mặc dù không được liệt kê trong danh sách chính thức *18 bài toán* của *Mathematical Problems for the Next Century*, nhưng Bài toán 1 là một trong ba bài toán được S. Smale liệt kê thêm ngoài danh sách chính thức và được S. Smale coi là "*...don't seem important enough to merit a place on our main list, but it would still be nice to solve them.*" (xem [36]).

Bài toán 1 được S. Smale phát biểu thành giả thuyết (sau này được gọi là *Giả thuyết giá trị trung bình Smale* hay *Giả thuyết Smale*) dưới đây.

Giả thuyết 1 (Giả thuyết giá trị trung bình của Smale) *Giả sử* $p(z)$ *là một đa thức bậc* $d \ge 2$ *với các điểm tới hạn là* z_j. *Nếu* z *không phải là điểm tới hạn của* $p(z)$ *thì*

$$\min_{j=1,\dots,d-1}\left|\frac{p(z)-p(z_j)}{(z-z_j)}\right| \le K(d)\left|p'(z)\right|, \tag{1.3}$$

với $K(d)=1$ *hoặc thậm chí có thể* $K(d)=\frac{d-1}{d}:=K_0(d)$.

Nhận xét 1.1 Hằng số $K_0(d)=\dfrac{d-1}{d}$ là tốt nhất có thể.

Thật vậy, xét đa thức $p(z)=z^d+\lambda z$ với $d\geq 2$ và $\lambda\neq 0.$ Ta có $p(0)=0$ và $p'(z)=dz^{d-1}+\lambda.$ Chọn $z=0,$ ta có $p(0)=0,$ $p'(0)=\lambda$ và

$$\left|\frac{p(0)-p(z_j)}{(0-z_j)p'(0)}\right|=\left|\frac{-z_j^d-\lambda z_j}{-z_j\lambda}\right|=\left|\frac{z_j^{d-1}+\lambda}{\lambda}\right|.$$

Vì z_j là nghiệm của $p'(z)=dz^{d-1}+\lambda=0$ nên thay $\lambda=-dz_j^{d-1}$ vào công thức trên ta được

$$\left|\frac{p(z)-p(z_i)}{(z-z_j)p'(z)}\right|=\left|\frac{z_j^{d-1}+\lambda}{\lambda}\right|=\left|\frac{z_j^{d-1}-dz_j^{d-1}}{-dz_j^{d-1}}\right|=\frac{d-1}{d}.$$

Do đó để bất đẳng thức (1.3) đúng với mọi $z\in\mathbb{C}$ và mọi đa thức $p(z)$ bậc d thì

$$K(d)\geq\frac{d-1}{d}.$$

Dấu bằng đạt được khi $z=0$ cho đa thức $p(z)=z^d+\lambda z$ nên $K_0(p)=\dfrac{d-1}{d}$ là cận tốt nhất có thể.

Nhận xét 1.2 Bằng phép biến đổi tuyến tính, không hạn chế tổng quát, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1.3) cho các đa thức $p(z)$ với $p(0)=0,$ $p'(0)\neq 0$ (hoặc thậm chí $p'(0)=1$) và chọn $z=0.$

Thật vậy, với mỗi $\zeta_i\in\mathbb{C}$ mà $p'(\zeta_i)\neq 0,$ đặt $g(z)=\dfrac{p(\beta z+\zeta_i)-p(\zeta_i)}{\beta p'(\zeta_i)}$ với $\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$ Khi ấy ta có $g(0)=\dfrac{p(\zeta_i)-p(\zeta_i)}{\beta p'(\zeta_i)}=0$ và

$$g'(z)=\frac{\beta p'(\beta z+\zeta_i)}{\beta p'(\zeta_i)}=\frac{p'(\beta z+\zeta_i)}{p'(\zeta_i)}.$$

Suy ra $g'(0)=1.$

Giả thuyết Smale có thể được phát biểu lại như sau.

Giả thuyết 1a *Cho $p(z)$ là một đa thức bậc $d\geq 2$ thỏa mãn $p(0)=0$ và $p'(0)\neq 0$. Khi đó tồn tại điểm tới hạn ζ của $p(z)$ để $\left|\dfrac{p(\zeta)}{\zeta p'(0)}\right|\leq K(d),$ trong đó $K(d)=1$ hoặc thậm chí $K(d)=\dfrac{d-1}{d}.$*

Với Nhận xét 1.2, ta có thể phát biểu lại Giả thuyết 1 dưới dạng sau.

Giả thuyết 1b (Giả thuyết đã được chuẩn hóa–the normalized conjecture) *Giả sử $p(z)$ là một đa thức bậc $d\geq 2$ thỏa mãn $p(0)=0$ và $p'(0)=1.$ Khi đó tồn tại một điểm tới hạn ζ của $p(z)$ sao cho $\left|\dfrac{p(\zeta)}{\zeta}\right|\leq K(d).$*

Giả thuyết 1 mới chỉ được chứng minh cho $d=2,3,4$ (xem [27]). Giả thuyết 1 cũng được Marinov và Sendov (2007) minh họa bằng các tính toán cho một lượng khá lớn các ví dụ với $d\leq 10$ trong [20].

Với $d=2,$ đa thức $p(z)=a_0z^2+a_1z+a_2$ ($a_0\neq 0$) thỏa mãn điều kiện $p(0)=0$ và $p'(0)=1$ có dạng $p(z)=a_0z^2+z.$ Đạo hàm $p'(z)=2a_0z+1$ có duy nhất một điểm tới hạn $\zeta=-\dfrac{1}{2a_0}.$ Do đó ta có

$$\frac{p(\zeta)}{\zeta}=\frac{a_0\zeta^2+\zeta}{\zeta}=a_0\zeta+1=a_0\left(-\frac{1}{2a_0}\right)+1=\frac{1}{2}.$$

Vậy Giả thuyết Smale trở thành đẳng thức cho đa thức bậc hai với $K(2)=\dfrac{1}{2}.$

Trường hợp $d = 3$ chứng minh không quá khó khăn, trường hợp $d = 4$ đã được chứng minh bởi J.-C. Sikorav và được cải tiến bởi Tischler (1989, [38]) và sau này được nhiều tác giả khác chứng minh theo nhiều cách khác nhau.

E. Crane trong bài Preprint (2004, [8]) và có lẽ cả trong luận án Tiến sĩ (2004, [7]), đã chứng minh Giả thuyết Smale cho trường hợp $d = 5$ dựa trên kết quả của [9] nhờ phương pháp số chính xác (a rigorous computational method). Tuy nhiên, cho tới nay, sau 10 năm, hình như vẫn chưa có công bố chính thức trên tạp chí.

G. Schmieder đã trình bày chứng minh Giả thuyết Smale trong một bài báo công bố trên *arXiv:math* (2003, [26]), tuy nhiên, hình như chưa có công bố trên tạp chí chính thức và chứng minh của G. Schmieder có vẻ như không được công nhận.

Như vậy, có thể nói, cho tới nay, Giả thuyết Smale mới chỉ được chứng minh chặt chẽ cho các trường hợp $d = 2,3,4$ hoặc một số lớp đa thức thỏa mãn một số tính chất nào đó.

1.2 Một số công thức đánh giá

Vì $\dfrac{d-1}{d} \le K(d) \le 4$ và đánh giá $K(d) = 1$ hoặc $K(d) = \dfrac{d-1}{d}$ chưa được chứng minh nên một trong các hướng nghiên cứu là làm *giảm hệ số* $K(d)$.

Beadon, Minda và Ng. (2002, [1]) đã chứng minh, có thể chọn

$$K_1(d) = 4^{1-\frac{1}{d-1}} = 4^{\frac{d-2}{d-1}}. \tag{1.4}$$

Hiển nhiên, $4^{\frac{d-2}{d-1}} < 4$ với mọi $d \ge 2$. Với $d = 5$ (là trường hợp bậc nhỏ nhất mà Giả thuyết Smale còn chưa được chứng minh), ta có $4^{\frac{d-2}{d-1}} = 4^{\frac{3}{4}} \approx 2.8284$.

Giả sử $p(z)$ là đa thức bậc $d \ge 2$, còn z_j, $j = 1,2,...,d-1$ là các điểm tới hạn của $p(z)$, tức là $p'(z_j) = 0$. Để tiện trình bày, với $z \ne z_j$, $j = 1,2,...,d-1$, ta kí hiệu