ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ LỆ THỦY

MỘT PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành	:	Toán ứng dụng
Mã số	:	60460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học :
GS. TSKH. Lê Dũng Mưu

Thái Nguyên - Năm 2013

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

MỤC LỤC

Danh mục các ký hiệu

Ký hiệu	**Ý nghĩa**
R^n	Không gian Euclide n – chiều trên trường số thực ;
N	Tập số tự nhiên;
x_i	Tọa độ thứ i của x;
x^T	Véc tơ hàng (chuyển vị của x) ;
$<x,y>=x^Ty$	Tích vô hướng cả hai véc- tơ x và y;
$\|x\|$	Chuẩn Euclide của x;
$\partial f(x)$	Dưới vi phân của f tại x;
$\partial_\varepsilon f(x)$	ε - dưới vi phân của f tại x;

MỞ ĐẦU

Cân bằng và điểm bất động là một đề tài quan trọng và có tính thời sự cao của toán học ứng dụng. Bài toán cân bằng mô tả dưới dạng bất đẳng thức Ky - Fan là bài toán bao hàm được nhiều lớp quan trọng của toán học ứng dụng như tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, mô hình cân bằng Nash v. v….

1. Lý do chọn đề tài

Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động có ứng dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Vấn đề nghiên cứu bài toán này đang là một đề tài được quan tâm, nghiên cứu .

Từ cơ sở khoa học và tính thực tiễn của bài toán nên tôi đã lựa chọn đề tài "*Một phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động*" tên tiếng Anh:"*A subgradient method for solving equilibrium problems over the set of fixed points*" làm đề tài nghiên cứu.

2.Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của đề tài là nắm và trình bày được một cách hệ thống các kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng, bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn, trên cơ sở đó giới thiệu một phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn. Đây là một lớp bài toán cân bằng hai cấp đang được quan tâm nghiên cứu.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Các kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn.
- Nội dung và tính hội tụ của một thuật toán dưới đạo hàm giải một lớp bài toán cân bằng trên tập điểm bất động

Qua việc thực hiện và hoàn thành luận văn cùng với sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo GS. TSKH Lê Dũng Mưu đã giúp tôi nắm chắc và hiểu sâu hơn về phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động. Tuy nhiên với vốn kiến thức còn hạn hẹp, luận văn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy em rất mong sự giúp đỡ chỉ dẫn của các thầy cô và thầy giáo hướng dẫn.

Ngoài phần mở đầu, danh mục các ký hiệu, danh mục tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2:Bài toán cân bằng.

Chương 3: Một phương pháp giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương 1 ta sẽ xét các kiến thức chuẩn bị cho bài luận văn. Luận văn có liên quan đến không gian Hilbert và các khái niệm, các kết quả liên quan đến không gian Hilbert, ánh xạ không giãn, tập điểm bất động. Do đó ta sẽ giới thiệu những khái niệm cơ bản nhất của không gian Hilbert và các tính chất đặc trưng nhất của nó. Nội dung của chương này được tham khảo từ các tài liệu [2],[3].

1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1.

Cho X là không gian Hilbert thực, tức là:

1. X là không gian vector trên trường số thực.

2. Trên X có tích vô hướng $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to R$ thoả mãn các tiên đề:

i. $\langle x , y \rangle = \langle y , x \rangle, \qquad \forall x , y \in X;$

ii. $\langle x+y , z \rangle = \langle x , z \rangle + \langle y , z \rangle \quad \forall x , y , z \in X;$

iii. $\langle \alpha x , y \rangle = \alpha \langle x , y \rangle \quad \forall x , y \in X, \alpha \in R;$

iv. $\langle x , x \rangle > 0$ *với mọi* $x \neq 0$ *và* $\langle x , x \rangle = 0$ *nếu* $x = 0$.

3. X trở thành không gian Banach với chuẩn được định nghĩa bởi:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Định nghĩa 1.1.2.

Xét dãy $\{x_n\}_{n\geq 0}$ và x thuộc không gian Hilbert thực X. Khi đó:

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ mạnh tới x, kí hiệu $x_n \to x$, nếu như:

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ yếu tới x, kí hiệu $x_n \to x$, nếu như:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w, x_n \rangle = \langle w, x \rangle, \forall w \in X.$$

Điểm x được gọi là điểm tụ mạnh (yếu) của dãy $\{x_n\}$ nếu từ dãy này có thể trích ra một dãy con hội tụ mạnh (yếu) tới x.

Ta nhắc lại các kết quả quen thuộc trong giải tích hàm liên quan đến hai loại hội tụ này:

Mệnh đề 1.1.3.

(i) Nếu $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x thì cũng hội tụ yếu đến x.

(ii) Nếu $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x và $\lim_{n\to+\infty} \| x_n \| = \| x \|$ thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.

(iii) Mọi dãy hội tụ mạnh (yếu) đều bị chặn và giới hạn theo sự hội tụ mạnh (yếu) nếu tồn tại thì là duy nhất.

(iv) Nếu không gian Hilbert X là không gian hữu hạn chiều thì sự hội tụ mạnh và sự hội tụ yếu là tương đương.

(v) Nếu $\{x_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert X thì ta trích ra được một dãy con hội tụ yếu.

(vi) Nếu $\{x_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert hữu hạn chiều X thì ta trích ra được một dãy con hội tụ mạnh.

Định nghĩa 1.1.4. *Tập C trong không gian Hilbert X được gọi là lồi nếu như với mọi x, y $\in$ C và $\lambda \in (0,1)$ ta có:*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C .$$

1.2 Ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert

Ánh xạ không giãn là toán tử Lipschitz liên tục với hằng số bằng 1. Nó đóng vai trò quan trọng trong toán ứng dụng vì rất nhiều vấn đề trong toán học đều có thể mô tả dưới bài toán tính điểm bất động của một ánh xạ không giãn.

Định nghĩa 1.2.1.

Cho C là tập con của không gian Hilbert X và T: C→X. Khi đó, ta có các định nghĩa sau:

i) T là không giãn ổn định nếu với mọi x và y thuộc C ta có:

$$\|Tx - Ty\|^2 + \|(Id - T)x - (Id - T)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

ii)T là không giãn nếu nó Lipschitz liên tục với hằng số 1, tức là với mọi x và y thuộc C ta có:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

iii) T là tựa không giãn nếu ta có:

$$\|Tx - y\| \leq \|x - y\|.\ \forall x \in C, \forall y \in FixT\ ;$$

iv)T là tựa không giãn chặt nếu ta có:

$$\|Tx - y\| < \|x - y\|.\ \forall x \in C,\ \forall y \in FixT\ .$$

Định nghĩa 1.2.2.

$$Fix(T) := \{x \mid Tx = x\}.$$

Định lí 1.2.3.

Nếu C là tập lồi, đóng trên không gian Hilbert X và T là ánh xạ không giãn trên C thì tập điểm bất động của T là một tập lồi đóng.

Định nghĩa 1.2.4 .

Xét hàm $f : X \to R \cup \{+\infty\}$. Khi đó: Hàm f được gọi là lồi trên một tập lồi C nếu:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1].$$

Hàm f được gọi là lồi chặt trên C nếu:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in X; x \neq y, \forall \lambda \in [0,1].$$

Hàm f được gọi là lồi mạnh trên C, với hệ số $\eta > 0$ nếu:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\eta\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x-y\|^2, \quad \forall x,y\in X, \quad \forall\lambda \in [0,1].$$

Ví dụ:

1. Mọi hàm afine $f(x) = a^Tx+b$ là hàm lồi. Nó thoả mãn đẳng thức:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y.$$

Do đó nó không lồi chặt.

2. Trong không gian Hilbert thực ta có khai triển:

$$\lambda\frac{\|x\|^2}{2}+(1-\lambda)\frac{\|y\|^2}{2}-\frac{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2}{2}$$

$$=\lambda\frac{\|x\|^2}{2}+(1-\lambda)\frac{\|y\|^2}{2}-\lambda^2\frac{\|x\|^2}{2}-(1-\lambda)^2\frac{\|y\|^2}{2}-\lambda(1-\lambda)\langle x,y\rangle$$

$$=\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle)$$

$$=\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x-y\|^2.$$

Do đó hàm $f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ là hàm lồi mạnh với hệ số 1.

3. Giả sử C là một tập khác rỗng. Hàm khoảng cách $d_C(x)$ được định nghĩa như sau:

$$d_C(x) = \inf_{y\in C}\|x-y\|.$$

Khi đó, nếu C là tập lồi thì d_C là hàm lồi.

Thực vậy, xét $x, y \in X$ và $\lambda \in (0, 1)$ bất kỳ .

Đặt $z = \lambda x+ (1-\lambda)y$.

Theo định nghĩa, tồn tại các dãy $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ trong C sao cho:

$$\lim_{k\to\infty}\|x - x_k\| = d_C(x) \text{ và } \lim_{k\to\infty}\|y - y_k\| = d_C(y).$$

Do C lồi nên $z_k := \lambda x_k + (1-\lambda)\, y_k \in C$. Ta có:

$$d_C(z) \leq \| z - z_k \| = \| \lambda(x-x_k) + (1-\lambda)(y-y_k) \|$$

$$\leq \lambda\| x - x_k \| + (1-\lambda)\| y-y_k \| .$$

Cho $k \to \infty$ ta có: $d_C(z) \leq \lambda d_C(x) + (1-\lambda) d_C(y)$.

Nếu tồn tại $\pi \in C$ sao cho $\| x-\pi \| = d_C(x)$ thì π được gọi là hình chiếu của x lên C. Khi đó π là nghiệm của bài toán tối ưu:

$$\min_{y\in C} \frac{\|x-y\|^2}{2}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để π là hình chiếu của x lên C trong trường hợp C lồi.

Mệnh đề 1.2.5. *Giả sử C là tập lồi khác rỗng trong X. Đặt:*

$$N_C(x) = \{w \in X / \langle w, y-x\rangle \leq 0,\ \forall y \in C\}.$$

Khi đó π là hình chiếu của x lên C khi và chỉ khi:

$$x - \pi \in N_C(\pi).$$

Chứng minh. Giả sử π là hình chiếu của x lên C.

Lấy y bất kỳ thuộc C. Đặt :

$$y_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda)\, \pi.$$

Do C lồi nên $y_\lambda \in C$ với mọi $\lambda \in (0, 1)$. Theo định nghĩa hình chiếu ta có:

$$\| x - \pi \|^2 \leq \| y_\lambda - x \|^2 = \| (\pi - x) + \lambda(y-\pi) \|^2.$$

Khai triển vế phải và giản ước ta thu được :

$$\lambda\|y-\pi\| + 2\langle \pi - x, y - \pi\rangle \geq 0.$$