ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TỐNG THỊ LIỄU

ĐỐI NGẪU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU LỒI

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số:60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học: PGS.TS Đỗ Văn Lưu

Thái Nguyên: 08/2013

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết đối ngẫu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa và có nhiều ứng dụng trong tối ưu hóa và toán ứng dụng. Với một bài toán tối ưu, người ta thường nghiên cứu một bài toán liên quan chặt chẽ với nó mà ta gọi là bài toán đối ngẫu. Nếu bài toán xuất phát là bài toán cực tiểu thì bài toán đối ngẫu là bài toán cực đại. Người ta mong muốn bài toán đối ngẫu dễ xử lý hơn bài toán xuất phát. Các loại bài toán đối ngẫu thường được nghiên cứu là đối ngẫu Lagrange, đối ngẫu Wolfe và đối ngẫu Mond-Weir với các định lý đối ngẫu yếu và mạnh. Các định lý đối ngẫu mạnh cho ta các điều kiện để giá trị hàm mục tiêu của bài toán xuất phát và bài toán đối ngẫu bằng nhau.

Lý thuyết đối ngẫu cho các bài toán tối ưu lồi được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu và thu được nhiều kết quả đẹp (xem chẳng hạn [5], [2], [4] và các tài liệu tham khảo trong các công trình đó). Chính vì vậy mà em chọn đề tài "Đối ngẫu của bài toán tối ưu lồi". Đề tài này có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Luận văn tập trung trình bày lý thuyết đối ngẫu cho các bài toán tối ưu lồi bao gồm định lý đối ngẫu Lagrange, định lý đối ngẫu tổng quát, các định lý đối ngẫu cho bài toán với các hàm khả vi Gâteaux, đối ngẫu của bài toán giá trị biên, đối ngẫu dưới ngôn ngữ hàm giá trị và hàm nhiễu.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Liên hợp của hàm lồi

Trình bày một số kết quả về liên hợp của hàm lồi. Kết quả chỉ ra rằng một hàm lồi nửa liên tục dưới là bao đóng trên của các hàm afine liên tục. Khái niệm hàm liên hợp (liên hợp Fenchel) được trình bày cùng với định lý song liên hợp, định lý về liên hợp của tổng hai hàm qua tổng chập infimal của hai hàm liên hợp. Chương này cũng trình bày định lý Hörmander mô tả một tập trong E^* qua các phiếm hàm dưới tuyến tính, nửa liên tục dưới trên E, định lý về song cực, bổ đề Farkas suy rộng.

Chương 2. Đối ngẫu của các bài toán tối ưu lồi

Trình bày lý thuyết đối ngẫu cho bài toán tối ưu lồi bao gồm định lý đối ngẫu Lagrange cho bài toán lồi với hữu hạn ràng buộc tập, định lý đối ngẫu tổng quát, các định lý đối ngẫu cho bài toán với các hàm khả vi Gâteaux, đối ngẫu của bài toán giá trị biên, đối ngẫu dưới ngôn ngữ hàm giá trị và hàm nhiễu.

Nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ em hoàn thành bản luận văn này. Em xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa toán, phòng đào tạo sau đại học trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học. Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Tống thị Liễu

Chương 1

LIÊN HỢP CỦA HÀM LỒI

Chương 1 trình bày một số kết quả về liên hợp của hàm lồi. Kết quả chỉ ra rằng một hàm lồi nửa liên tục dưới là bao đóng trên (upper envelope) của các hàm afine liên tục. Khái niệm hàm liên hợp được trình bày cùng với các định lý về song liên hợp, định lý về liên hợp của tổng hai hàm qua tổng chập infimal của hai hàm liên hợp. Chương này cũng trình bày định lý Hörmander về việc mô tả một tập trong E^* qua các hàm dưới tuyến tính, nửa liên tục dưới trên E, định lý về song cực và bổ đề Farkas suy rộng. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong các tài liệu [5], [1], [6].

1.1 Chính quy hóa Gamma

Trong chương này ta kí hiệu (E, E^*) là cặp đối ngẫu của các không gian lồi địa phương. Trong phần này, ta sẽ chỉ ra rằng một hàm lồi nửa liên tục dưới là bao trên của các hàm affine liên tục.

Định nghĩa 1.1.1

Với $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ta đặt

$$A(f) := \left\{a : E \to \mathbb{R} | a \text{ là hàm affine liên tục, } a \le f\right\}.$$

$f^\Gamma : E \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa bởi

$$f^\Gamma(x) := \sup\left\{a(x) | a \in A(f)\right\}, x \in E$$

được gọi là chính quy hóa Gamma của hàm f. Ta quy ước $\sup \varnothing := -\infty$.

Cho hàm $f : M \subseteq E \to \overline{\mathbb{R}}$. Miền hữu hiệu (effective domain) của f được *định nghĩa như sau (xem [1]):*

$$domf = \{x \in M | f(x) < +\infty\}.$$

Hàm f được gọi là chính thường (proper) nếu $domf \neq \varnothing$ và $f(x) > -\infty (\forall x \in M)$.

Mệnh đề 1.1.1

Nếu $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm chính thường, thì các phát biểu dưới đây là tương đương:

(a) $f = f^{\Gamma}$;

(b) f là liên tục nửa dưới và lồi .

Chứng minh

$(a) \Rightarrow (b)$: Hiển nhiên.

$(b) \Rightarrow (a)$: Rõ ràng là $f^{\Gamma} \leq f$. Bây giờ giả sử rằng với x_0 nào đó thuộc E và một k nào đó thuộc $\mathbb{R}$, ta có $f^{\Gamma}(x_0) < k < f(x_0)$. Ta chỉ ra rằng tồn tại $a \in A(f)$ thỏa mãn $k < a(x_0)$ thì dẫn đến một mâu thuẫn $f^{\Gamma}(x_0) > k$.

Bởi vì f là nửa liên tục dưới, cho nên $epif$ đóng. Hơn nữa $epif$ lồi và $(x_0, k) \notin epif$. Theo định lý tách mạnh 1.5.9[5], áp dụng với $A := epif$ và $B := \{(x_0, k)\}$, tồn tại $\omega \in (E \times \mathbb{R})^*$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\omega(x,t) \leq \alpha, \forall (x,t) \in epif \text{ và } \omega(x_0,k) > \alpha. \qquad (1.1)$$

Chúng ta có

$$\omega(x,t) = \langle x^*, x \rangle + ct, \text{ trong đó } \langle x^*, x \rangle := \omega(x,0), c := \omega(0,1). \qquad (1.2)$$

Rõ ràng là $x^* \in E^*$. Hơn nữa, bởi vì $(x,t) \in epif$ kéo theo $(x,t') \in epif$, với mỗi $t' > t$, ta có

$$c \leq \frac{\alpha - \langle x^*, x \rangle}{t'}, \forall t' > max\{0,t\}.$$

Do đó, cho $t' \to +\infty$, ta nhận được $c \leq 0$. Bây giờ chúng ta phân biệt hai trường hợp.

Trường hợp 1. Giả sử rằng$f(x_0) < +\infty$. Khi đó, (1.1) với $t := f(x_0)$ và (1.2) kéo theo

$$\langle x^*, x_0 \rangle + cf(x_0) \leq \alpha < \langle x^*, x_0 \rangle + ck.$$

Bởi vì $k < f(x_0)$, ta suy ra $c < 0$. Hàm số $a : E \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$a(x) := \frac{\alpha}{c} - \frac{1}{c} \langle x^*, x \rangle, x \in E$$

là hàm affine liên tục. Nếu $x \in domf$, từ (1.1) ta có

$$a(x) := \frac{1}{c}(\alpha - \omega(x, f(x))) + f(x) \leq f(x).$$

Nếu $x \notin domf$, thì $a(x) < +\infty = f(x)$. Vì vậy, $a \in A(f)$. Hơn nữa, ta có

$$a(x_0) = \frac{1}{c}(\alpha - \langle x^*, x_0 \rangle) > k.$$

Trường hợp 2: Giả sử rằng $f(x_0) = +\infty$. Nếu $c < 0$, thì ta định nghĩa hàm số a như trong trường hợp 1. Bây giờ giả sử rằng $c = 0$. Bởi vì f là hàm chính thường, tồn tại $y_0 \in domf$. Theo trường hợp 1, với y_0 thay cho x_0, tồn tại $a_0 \in A(f)$. Định nghĩa $a : E \to \mathbb{R}$ như sau

$$a(x) := a_0(x) + \rho(\langle x^*, x \rangle - \alpha) \text{ trong đó } \rho := \frac{|k - a_0(x_0)|}{\langle x^*, x_0 - \alpha \rangle} + 1.$$

Khi đó a là hàm affine liên tục. Hơn nữa, ta có $a(x) \leq a_0(x) \leq f(x)$, với mỗi $x \in domf$. Như vậy, $a \in A(f)$.

Cuối cùng, lưu ý rằng

$$a_0(x_0) + |k - a_0(x_0)| \geq k \text{ và } \langle x^*, x_0 \rangle > \alpha.$$

Khi đó, ta có

$$a(x_0) = a_0(x_0) + |k - a_0(x_0)| + \langle x^*, x_0 \rangle - \alpha > k.$$

Chứng minh được hoàn thành. $\square$

1.2 Hàm liên hợp

Khái niệm về hàm liên hợp có nguồn gốc từ phép biến đổi của tích các phép biến đổi Legendre trong phép tính biến phân sẽ rất quan trọng cho lý thuyết đối ngẫu trong tối ưu lồi.

Định nghĩa 1.2.1

Cho $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Hàm số $f^* : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ định nghĩa bởi

$$f^*(x^*) := \sup_{x \in E}(\langle x^*, x\rangle - f(x)), x^* \in E^*,$$

được gọi là liên hợp Fenchel (hay ngắn gọn là liên hợp) của hàm f.

Nếu f là hàm chính thường, định nghĩa kéo theo bất đẳng thức Young

$$\langle x^*, x\rangle \leq f(x) + f^*(x^*), \forall x \in E, \forall x^* \in E^*. \tag{1.3}$$

Ví dụ 1.2.1

Cho $p \in (0, +\infty)$, định nghĩa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bởi $f(x) := \frac{|x|^p}{p}$. Ta tính f^*. Cho $E = \mathbb{R}$, ta có $E^* = \mathbb{R}$. Với mỗi $x^* \in \mathbb{R}$ cố định, đặt $\varphi(x) := x^*x - f(x)$. Hàm $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lõm (nghĩa là $-\varphi$ là hàm lồi) và khả vi. Do đó, φ có một cực đại duy nhất x_0 thỏa mãn $\varphi^{'}(x_0) = 0$, tức là $x^* - sgn(x_0)|x_0|^{p-1} = 0$. Ta suy ra

$$f^*(x^*) = \varphi(x_0) = \frac{|x^*|^q}{q}, \text{ trong đó } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Như vậy, trong trường hợp này, bất đẳng thức Young(1.3) chỉ là bất đẳng thức Young cổ điển cho các số thực:

$$x^*x \leq \frac{|x^{''}|^p}{p} + \frac{|x^*|^p}{q}.$$

Mệnh đề 1.2.1

Nếu $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, thì các phát biểu dưới đây đúng :

(a) f^* là hàm lồi nửa liên tục dưới.

(b) Nếu $domf \neq \varnothing$, thì $f^*(x^*) > -\infty$ với mọi $x^* \in E^*$.

(c) Nếu f là hàm chính thường, lồi và nửa liên tục dưới, thì f^* là hàm chính thường, lồi và nửa liên tục dưới.

Chứng minh

(a) Dễ dàng thấy rằng f^* lồi. Để chứng minh khẳng định thứ hai, chú ý rằng với mỗi $x \in E$, các hàm số $\varphi_x(x^*) := \langle x^*, x\rangle - f(x), x^* \in E^*$ liên tục, và như vậy $f^* = \sup_{x\in E} \varphi_x$ là nửa liên tục dưới.

(b) Hiển nhiên.

(c) Bởi vì f là hàm chính thường, ta có $A(f) \neq \varnothing$. Do đó, tồn tại $x^* \in E^*$ và $c \in \mathbb{R}$ sao cho $\langle x^*, x\rangle + c \leq f(x)$, với cho mỗi $x \in E$. Từ đó suy ra

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in E}(\langle x^*, x\rangle - f(x)) \leq -c < +\infty.$$

Do đó $x^* \in domf^*$. □

Cho $g : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$, hàm liên hợp $g^* : E \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa tương tự bởi

$$g^*(x) := \sup_{x^*\in E^*} (\langle x^*, x\rangle - g(x^*)), x \in E.$$

Bây giờ giả sử $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Với $g := f^*$, ta có hàm song liên hợp $f^{**} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ của f:

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in E^*} (\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)), x \in E.$$

Định lý 1.2.1

Cho $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Ta có $f^{**} = f^{\Gamma} \leq f$.

(b) Nếu f *là hàm chính thường, thì* $f^{**} = f$ *nếu và chỉ nếu* f *là lồi và nửa liên tục dưới.*

Chứng minh

(a) Rõ ràng $f^{\Gamma} \leq f$. Ta chỉ ra rằng $f^{**} = f^{\Gamma}$. Với $x^* \in E^*$ và $c \in \mathbb{R}$, ta có

$$\langle x^*, x\rangle + c \leq f(x), \forall x \in E \Leftrightarrow f^*(x^*) = \sup_{x \in E} (\langle x^*, x\rangle - f(x)) \leq -c.$$

Như vậy,

$$f^{\Gamma}(x) = \sup \{\langle x^*, x\rangle + c | x^* \in E, c \in \mathbb{R}, c \leq -f^*(x^*)\} \qquad (1.4)$$

Nếu $f^*(x^*) > -\infty, \forall x^* \in E^*$, thì

$$f^{\Gamma}(x) \underset{(2.4)}{=} \sup \{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*) | x^* \in E^*\} = f^{**}(x), \forall x \in E$$

Nếu $f^*(x^*) = -\infty$ với x^* nào đó thuộc E^*, thì

$$f^{\Gamma}(x) = +\infty = f^{**}(x), \forall x \in E.$$

(b) Được suy ra từ (a) và mệnh đề 1.1.1. $\square$

Ví dụ 1.2.2

Cho hàm chỉ δ_A của một tập hợp con khác rỗng A của E. Ta có

$$\delta_A^*(x^*) = \sigma_A(x^*), \forall x^* \in E^*,$$

Trong đó $\delta_A : E^* \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm tựa của A. Nếu E là không gian véctơ định chuẩn và $A = B_E$ (hình cầu đơn vị đóng trong E), thì

$$\delta_{B_E}^*(x^*) = \sigma_{B_E}(x^*) = \sup_{||x|| \leq 1} \langle x^*, x\rangle = ||x^*||, \forall x^* \in E^*.$$

Ví dụ 1.2.3

Cho E là một không gian véctơ định chuẩn và $f(x) = ||x||, x \in E$.