ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HOÀNG TUẤN ANH

TỐI ƯU VÉCTƠ TUYẾN TÍNH VÀ ỨNG DỤNG VÀO MÔ HÌNH KINH TẾ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HOÀNG TUẤN ANH

TỐI ƯU VÉCTƠ TUYẾN TÍNH VÀ ỨNG DỤNG VÀO MÔ HÌNH KINH TẾ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN QUÝ

THÁI NGUYÊN – NĂM 2013

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sĩ Nguyễn Văn Quý. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, thông qua các bài giảng, tác giả luôn được sự quan tâm giúp đỡ của các Giáo sư công tác tại Viện Toán học Việt Nam, các thầy cô giáo trong Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên tôi vượt qua những khó khăn trong cuộc sống để tôi có điều kiên tốt nhất khi nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Hoàng Tuấn Anh

Mở đầu

Từ xa xưa, xuất phát từ những nhu cầu thực tế như việc xây dựng, đo đạc diện tích đất trồng, đi biển, tính toán buôn bán,… con người đã quan tâm tới các bài toán tìm các giá trị lớn nhất (cực đại) hay nhỏ nhất (cực tiểu), tức là tìm phương án tốt nhất để đạt mục tiêu mong muốn trong một điều kiện hoàn cảnh nào đó. Về mặt lý thuyết, bài toán tối ưu ra đời từ rất sớm với sự đóng góp to lớn của các nhà toán học nổi tiếng như: P. Fermat (1601-1665), L. Euler (1707-1783), P. Dirichlet (1805-1859),… Nhưng phải đến những năm 30 và 40 của thế kỷ 20, Qui hoạch toán học, hay còn gọi là Toán tối ưu mới hình thành với tư cách là một lý thuyết độc lập với những nghiên cứu khác nhau: đầu tiên là Qui hoạch tuyến tính, tiếp đó là Qui hoạch lồi, Qui hoạch toàn cục và Lý thuyết điều khiển tối ưu. Các bộ môn này phát triển mạnh mẽ và được ứng dụng rộng rãi để giải quyết các bài toán thực tế nảy sinh trong nhiều lĩnh vực như sản xuất, kinh tế, kỹ thuật,…Nét đặc trưng của các bộ môn này là cùng qui về việc tối ưu một hàm mục tiêu duy nhất trong những điều kiện nhất định, tuy nhiên trong thực tế, cùng một lúc người ta phải theo đuổi nhiều mục tiêu khác nhau. Chẳng hạn trong sản xuất ngoài việc nâng cao năng suất lao động, người ta còn quan tâm tới đa dạng hóa sản phẩm, đảm bảo chất lượng hàng hóa, hạ giá thành sản phẩm,… Khi mua hàng, ta vừa muốn được hàng rẻ, vừa muốn hàng đạt chất lượng cao, hình thức đẹp,… khi đó, qui hoạch đa mục tiêu (hay còn gọi là tối ưu véctơ) sẽ cung cấp các công cụ giúp chúng ta giải quyết các vấn đề này.

Một bộ phận quan trọng của qui hoạch đa mục tiêu là qui hoạch tuyến tính đa mục tiêu. Đối tượng nghiên cứu chính của nó là lớp các bài toán qui hoạch đa mục tiêu với các hàm mục tiêu là tuyến tính và tập ràng buộc $M \subset R^n$ là một tập lồi đa diện. Đây là lớp bài toán có ý nghĩa ứng dụng đặc biệt quan trọng trong thực tế.

Qui hoạch đa mục tiêu có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt là trong lý thuyết quyết định, quản lý, công nghiệp, hành chính,… Mục đích của bài toán qui hoạch tuyến tính đa mục tiêu là tối ưu đồng thời nhiều hàm mục tiêu độc lập với nhau trên mọi miền chấp nhận được khác rỗng $M \subset R^n$. Do không gian giá trị này được sắp thứ tự toàn phần nên khái niệm nghiệm tối ưu thông thường không còn thích hợp nữa. Vì vậy, thay vào đó, cùng với khái niệm về thứ tự từng phần người ta đưa ra khái niệm nghiệm hữu hiệu. Đây là nền tảng của tối ưu véctơ.

Việc xây dựng các thuật toán xác định một phần hoặc toàn bộ tập nghiệm hữu hiệu của bài toán được sự quan tâm của nhiều tác giả như: Armand, Benson, Evans,… Các thuật toán đưa ra thường sử dụng phương pháp đơn hình đa mục tiêu, phương pháp tham số, phương pháp vô hướng hóa (xem [15], [16] và các tài liệu trích dẫn kèm theo). Sử dụng khái niệm về nón pháp tuyến của tập lồi đa diện, các tác giả Đinh Thế Lục và Nguyễn Thị Bạch Kim đã đưa ra phương pháp nón pháp tuyến để giải bài toán tối ưu véctơ tuyến tính (xem [12],[13]).

Một trong những ứng dụng của tối ưu véctơ trong kinh tế là tiếp cận tối ưu véctơ đối với các mô hình kinh tế nổi tiếng có nhiều ứng dụng thực tiễn như mô hình cân bằng thị trường độc quyền tập đoàn Nash – Cournot (xem [7]).

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bày một số khái niệm cơ bản về tập lồi đa diện.

Chương 2: Trình bày phương pháp nón pháp tuyến giải bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu.

Chương 3: Trình bày cách tiếp cận tối ưu véc tơ với mô hình kinh tế Nash – cournot.

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Chương này trình bày một số kết quả cơ bản của giải tích lồi thường hay được sử dụng trong lý thuyết tối ưu. Nội dung chính của chương chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [3] và [4].

1.1. Tập affine

Định nghĩa 1.1. Đường thẳng đi qua 2 điểm $a, b \in R^n$ là tập hợp tất cả các điểm $x \in R^n$ có dạng: $x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in R$.

Định nghĩa 1.2. Tập hợp M trong R^n chứa đường thẳng đi qua 2 điểm bất kì của nó thì được gọi là tập affine.

Định nghĩa 1.3. Đoạn thẳng đi qua 2 điểm $a,\ b \in R^n$ kí hiệu bởi [a,b] là tập hợp có dạng:

$$\left\{x \in R^n : x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ 0 \le \lambda \le 1\right\}$$

Định nghĩa 1.4. Cho một tập hợp C bất kì trong R^n, tập affine nhỏ nhất chứa C được gọi là bao affine của C và kí hiệu là *aff C*.

Định nghĩa 1.5. Tập hợp tất cả các điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ thỏa mãn bất phương trình tuyến tính: $\langle a, x\rangle \le \alpha, a \in R^n \setminus \{0\},\ \alpha \in R$ được gọi là nửa không gian đóng.

Nửa không gian được cho bởi: $\langle a, x\rangle < \alpha, a \in R^n \setminus \{0\},\ \alpha \in R$ được gọi là nửa không gian mở.

1.2. Tập lồi

Định nghĩa 1.6. Một tập M trong không gian R^n được gọi là tập lồi nếu nó thỏa mãn điều kiện:

$$\forall a, b \in M,\ \forall \lambda \in [0,1] \text{ thì } x = \lambda a + (1-\lambda)b \in M .$$

Từ định nghĩa dễ dàng nhận thấy, nếu M là tập lồi thì nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của nó.

Định nghĩa 1.7. Cho $x^1, x^2, ..., x^n \in R^n$. Nếu $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ thì x được gọi là tổ hợp lồi của $x^1, x^2, ..., x^n$.

Mệnh đề 1. 1. Tập $M \subset R^n$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc M.

Định nghĩa 1.8. Tập $M \subset R^n$ được gọi là một nón với đỉnh nếu:

$$\forall x \in M,\ \forall \lambda \geq 0 \text{ thì: } \bar{x} = a + \lambda(x - a) \in M$$

Nếu M là một nón có đỉnh tại a và M lại là tập lồi thì M được gọi là một nón lồi.

Định lý 1.1. Tập lồi là đóng với phép giao, phép cộng, phép nhân với một số và phép lấy tổ hợp tuyến tính. Nói cách khác, nếu A và B là 2 tập lồi trong R^n thì các tập sau cũng là lồi:

(i) $A \cap B := \{x : x \in A,\ x \in B\}$

(ii) $\lambda A + \lambda B := \{x = \lambda a + \beta b :\ a \in A, b \in B, \lambda, \beta \in R\}$.

Một cách tổng quát chúng ta có: giao của một họ bất kỳ các tập lồi cũng là tập lồi.

Định nghĩa 1.9. Giao của tất cả các tập lồi chứa tập $S \subset R^n$ được gọi là bao lồi của tập S và kí hiệu là convS.

Định lý 1.2. Bao lồi của tập $S \subset R^n$ chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử của nó.

1.3. Tập lồi đa diện

Định nghĩa 1.10. Một tập lồi đa diện trong R^n là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng. Nói cách khác, một tập lồi đa diện M chính là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính:

$$\langle a^i, x \rangle \geq b_i, i = 1, ..., m \qquad (1.1)$$

trong đó $a^1,...,a^m$ là các vectơ hàng n-chiều, x là vectơ cột *n*-chiều và $b_1,...,b_m$ là các số thực.

Định nghĩa 1.11. (i) Một tập con lồi khác rỗng $F \subseteq M$ được gọi là một diện của *M* nếu bất cứ đoạn thẳng nào nằm trong *M* và có một điểm trong tương đối $x \in F$ đều nằm trọn trong *F*. Nghĩa là:

$x \in F,\ x = \lambda y + (1-\lambda)z,\ 0 < \lambda < 1,\ y,\ z \in M \Rightarrow y \in F, \mathrm{z} \in F$.

(ii) Số chiều (hay thứ nguyên) của diện *F*, ký hiệu bởi *dimF*, được định nghĩa là số chiều của đa tạp tuyến tính nhỏ nhất chứa nó.

(iii) Diện 0 - chiều gọi là một đỉnh.

(iv) Diện 1- chiều gọi là một cạnh.

Một đỉnh (hay cạnh) của một diện của *M* cũng là một đỉnh (hay cạnh) của chính M.

Mệnh đề 1.2. Tập con khác rỗng $F \subseteq M$ là diện của M khi và chỉ khi tồn tại một tập chỉ số $I \subseteq \{1,...,m\}$ sao cho F là tập nghiệm của hệ:

$$\begin{aligned} \langle a^i, x \rangle &= b_i, i \in I \\ \langle a^i, x \rangle &\geq b_j, j \in \{1,...,m\} \setminus I, \end{aligned} \tag{1.2}$$

đồng thời khi đó ta có: $\dim F = n - rank\left\{a^i : i \in I\right\}$.

Ở đây, $rank\left\{a^i : i \in I\right\}$ là số các vectơ độc lập tuyến tính cực đại trong bộ các vectơ $\left\{a^i : i \in I\right\}$.

Định nghĩa 1.12. Nón lùi xa của tập lồi đa diện *P* được ký hiệu và định nghĩa bởi:

$$\mathrm{Re}cP := \left\{v \in R^n : x + tv \in M \text{ với mọi } x \in M \text{ và } t > 0\right\}$$

Mệnh đề 1.3. i) Nón lùi xa $\mathrm{Re}cM$ của tập lồi đa diện *M* là tập nghiệm của hệ

$$\langle a^i, x \rangle \geq 0,\ i = 1,...,m; \tag{1.3}$$

ii) $\mathrm{Re}cM = \{0\}$ khi và chỉ khi *M* là bị chặn.