ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Vân Anh

PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ PHI TUYẾN VỚI TOÁN TỬ m - ACCRETIVE TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Cô trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Thị Vân Anh

Bảng ký hiệu

X	Không gian Banach thực
X^*	Không gian liên hợp của X
ϕ	Tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall x$	Với mọi x
$\exists x$	Tồn tại x
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	Infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$
I	Ánh xạ đơn vị
J	Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J
A^*	Toán tử liên hợp của toán tử A
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
$x^k \to x$	Dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	Dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x

Mở đầu

Phương trình toán tử với toán tử accretive có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc nghiên cứu phương trình vi phân đạo hàm riêng trong không gian L_p hay không gian Sobolev W_p^m.

Trong đề tài luận văn, chúng tôi nghiên cứu phương trình toán tử accretive dạng

$$A(x) = f, \tag{0.1}$$

ở đây A là một toán tử từ không gian Banach phản xạ thực X vào X, f là phần tử của X. Nếu không có thêm điều kiện cho toán tử A, chẳng hạn tính accretive đều hoặc accretive mạnh, thì phương trình toán tử (0.1) nói chung là một bài toán đặt không chỉnh, theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Để giải loại bài toán này, ta cần sử dụng các phương pháp giải ổn định. Trong [1] Alber và Ryazansteva đã nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov

$$A(x) + \alpha(x - x^+) = f_\delta, \tag{0.2}$$

để hiệu chỉnh phương trình toán tử (0.1), ở đây f_δ là xấp xỉ của f thỏa mãn $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\delta \to 0$, $x^+ \in X$ là một phần tử cho trước tùy ý, α là một tham số dương. Với điều kiện liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của không gian X, họ đã chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm x_α^δ của bài toán (0.2), và nghiệm này hội tụ mạnh đến nghiệm x^* của bài toán (0.1) khi α, $\delta/\alpha \to 0$.

Không cần đến tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J, tốc độ hội tụ của dãy nghiệm x_α^δ của phương trình hiệu chỉnh (0.2) được đánh giá với điều kiện (xem [5])

$$\|A(x)-A(y_*)-QA^{'}(y_*)^*J(x-y_*)\| \leq \tau\|A(x)-A(y_*)\|, \ \forall y \in X, \quad (0.3)$$

ở đây τ là một hằng số dương, Q là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X^* và điều kiện trơn của nghiệm

$$x^+ - y_* = A^{'}(y_*)v, \quad (0.4)$$

với v là phần tử thuộc X, A' là đạo hàm Frećhet của A.

Chú ý rằng, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có tính chất liên tục yếu theo dãy chỉ có ở một lớp không gian Banach rất hẹp (không gian l_p), đồng thời điều kiện trơn (0.4) của nghiệm cũng khó thực hiện được ở các bài toán thực tế. Để khắc phục những hạn chế này, năm 2012, Giáo sư Nguyễn Bường [3] đã đưa ra một phương pháp hiệu chỉnh mới cho phương trình (0.1). Ông đã chứng minh sự hội tụ mạnh của nghiệm hiệu chỉnh không cần tính chất liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J và đánh giá tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh không cần các điều kiện (0.3) và (0.4).

Mục đích của đề tài luận văn là đọc hiểu, trình bày lại và làm chi tiết hơn kết quả trong bài báo [5], [3] và [4] về hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive (0.1) trong các trường hợp ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J có tính chất liên tục yếu theo dãy và J không cần tính chất liên tục yếu theo dãy.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về toán tử accretive, m-accretive, phương trình toán tử accretive, m-accretive, và bài toán đặt không chỉnh. Trong chương 2 chúng tôi trình bày một số kết quả mới của Nguyễn Bường và các cộng sự về hiệu chỉnh phương trình toán tử m-accretive trong không gian Banach.

Chương 1

Phương trình với toán tử m-accretive

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về toán tử accretive, m-accretive, phương trình với toán tử m-accretive và bài toán đặt không chỉnh. Kiến thức của chương này được tập hợp từ tài liệu [1] và [2].

1.1 Toán tử m-accretive

1.1.1 Toán tử accretive

Cho X là một không gian Banach phản xạ thực, X^* là không gian liên hợp của X, X và X^* là các không gian lồi chặt. Ký hiệu 2^X là một họ các tập con khác rỗng của X. Cho $A : X \to X$ là một ánh xạ với miền xác định $D(A)$, gọi $N(A)$, $F(A)$ lần lượt là tập hợp các không điểm và điểm bất động của A, nghĩa là

$$N(A) = \{x \in D(A) : A(x) = 0\},$$
$$F(A) = \{x \in D(A) : A(x) = x\}.$$

Định nghĩa 1.1. Ánh xạ $J : X \to 2^{X^*}$ (nói chung đa trị) được định nghĩa bởi:

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\| \, \|x\| \, ; \|x^*\| = \|x\|\} \, ,$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian X.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được cho trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử X là một không gian Banach. Khi đó,*

(i) $J(x)$ là tập lồi, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$, với mọi $\lambda > 0$;

(ii) $J(x)$ là ánh xạ đơn trị khi X^* là không gian lồi chặt. Trong trường hợp X là không gian Hilbert thì $J = I$-toán tử đơn vị trong X.

Không làm mất tính tổng quát, ta ký hiệu ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị bởi J. Trong luận văn này, chúng tôi xét ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J là đơn trị.

Định nghĩa 1.3. Ánh xạ đối ngẫu $J : X \to 2^{X^*}$ được gọi là liên tục yếu theo dãy (weak to weak continuous) nếu với bất kỳ dãy $x_n \subset D(J)$ sao cho $x_n \rightharpoonup x_0$ thì $Jx_n \rightharpoonup Jx_0$.

Định nghĩa 1.4. Toán tử $A : D(A) = X \to X$ được gọi là

(i) toán tử accretive nếu

$$\langle J(x-y), A(x) - A(y)\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in D(A);$$

(ii) toán tử accretive chặt nếu dấu bằng ở bất đẳng thức trên chỉ đạt được khi $x = y$;

(iii) toán tử accretive đều nếu tồn tại một hàm tăng $\gamma(t)$, $t \geq 0$, $\gamma(0) = 0$ sao cho

$$\langle J(x-y), A(x) - A(y)\rangle \geq \gamma(\|x-y\|) \, , \ \forall x, y \in D(A);$$

(iv) toán tử accretive mạnh nếu $\gamma(t) = ct^2$, $c \geq 0$;

(v) h-liên tục (hemicontinuous) tại điểm $x_0 \in D(A)$ nếu dãy $\{A(x_0 + t_n x)\}$ hội tụ yếu tới Ax_0 với mọi phần tử x sao cho $x_0 + t_n x \in D(A)$, $0 \leq t_n \leq t(x_0)$ và $t_n \to 0$, $n \to \infty$.

(vi) toán tử accretive A được gọi là bức (coercive) nếu

$$\langle J(x), A(x)\rangle \geq c\left(\|x\|\right).\|x\|\,,\ \forall x \in D\left(A\right);$$

trong đó $c(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$.

Khái niệm toán tử accretive còn được mô tả dựa trên đồ thị $Gr(A)$ trong không gian tích $X \times X$.

Định nghĩa 1.5. Toán tử $A : X \to X$ được gọi là

(i) toán tử accretive nếu

$$\langle J\left(x_1 - x_2\right), y_1 - y_2\rangle \geq 0,$$

với mọi x_1, $x_2 \in D\left(A\right)$, $y_1 \in A(x_1)$, $y_2 \in A(x_2)$;

(ii) accretive cực đại nếu nó là toán tử accretive và đồ thị của nó không thực sự chứa trong đồ thị của bất kì một toán tử accretive nào khác.

Mệnh đề 1.6. *Cho $A : X \to X$ là một toán tử. Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

(i) A là toán tử accretive.

(ii) Với mọi $\lambda > 0$ và $\forall x_1$, $x_2 \in D\left(A\right)$

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\|. \tag{1.1}$$

Chứng minh.

$i) \Rightarrow ii)$ Giả sử A là toán tử accretive, khi đó với mọi $\lambda > 0$, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$ ta có

$$\begin{aligned}\langle J\left(x_1 - x_2\right), x_1 - x_2 + \lambda\left(A(x_1) - A(x_2)\right)\rangle &= \langle J\left(x_1 - x_2\right), x_1 - x_2\rangle \\ &\quad + \lambda\left(J\left(x_1 - x_2\right), A(x_1) - A(x_2)\right) \\ &\geq \|x_1 - x_2\|^2\end{aligned}$$