

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VI TIỀN DỮNG

THUẬT TOÁN NÓN XOAY GIẢI BÀI TOÁN
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN TỔNG QUÁT

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS : NGUYỄN ANH TUẤN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mục lục	i
Lời cảm ơn	iii
Mở đầu	1
1 Bài toán tối ưu tổng quát và một số mô hình bài toán thực tế	3
1.1 Bài toán tối ưu tổng quát	3
1.2 Một số mô hình thực tế	4
1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất	4
1.2.2 Bài toán vận tải	4
1.2.3 Bài toán cái túi	5
1.3 Tập lời đa diện	6
1.4 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và một số phương pháp giải	8
1.4.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát	8
1.4.2 Dạng chuẩn tắc và dạng chính tắc	9
1.4.3 Đưa bài toán QHTT về dạng chuẩn hoặc chính tắc	9
1.5 Một số phương pháp giải bài toán QHTT	11
1.5.1 Phương pháp đơn hình [6]	11
1.5.2 Phương pháp đơn hình cải biên [6]	14
1.5.3 Phương pháp Karmarkar (Điểm trong) [6]	16
2 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát và phương pháp nón xoay	18
2.1 Một số khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính [1]	18
2.2 Khái niệm về miền ràng buộc tuyến tính không bị chặn, phương vô hạn chấp nhận được và hướng tăng, giảm của hàm gần lồi-gần lõm	20

2.3	Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát	22
2.4	Khái niệm về nón tuyến tính, cạnh của nón và nón min	23
2.4.1	Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính	23
2.4.2	Khái niệm về cạnh của nón đơn hình	23
2.4.3	Khái niệm về nón xoay $M(r,s)$ sinh ra từ nón M	28
2.4.4	Định nghĩa nón min	30
2.5	Phương pháp nón xoay tuyến tính	34
2.5.1	Thuật toán nón xoay tuyến tính	35
2.5.2	Bảng lập giải bài toán qui hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính và ví dụ minh họa	37
3	Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn bất kỳ với hàm mục tiêu bị chặn và thuật toán nón xoay MTBC	44
3.1	Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu bị chặn	44
3.1.1	Xây dựng nón min ban đầu	45
3.1.2	Thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn bất kỳ với hàm mục tiêu bị chặn	45
3.2	Bảng lập nón xoay giải bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu bị chặn bằng thuật toán MTBC và các ví dụ minh họa	47
3.3	Thuật toán nón xoay MTBC giải ví dụ KLEE – MINTY	57
3.4	Vài nét về độ phức tạp tính toán của thuật toán MTBC và kết luận	61
		63

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sỹ Nguyễn Anh Tuấn người đã tận tình hướng dẫn để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể quý thầy cô giáo giảng dạy tại Trường Đại Học Khoa Học và Viện Toán Học Việt Nam đã dạy bảo tôi tận tình trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới các bạn đồng môn đã giúp đỡ, cổ vũ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Cuối cùng, con xin cảm ơn bố mẹ. Nhờ có bố mẹ gian khó, vất vả ngày đêm tạo mọi điều kiện tốt nhất để con có được thành quả ngày hôm nay.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 05 năm 2013

Mở đầu

Chúng ta đã biết quy hoạch tuyến tính là bài toán rất quan trọng trong lý thuyết tối ưu hóa. Những thập kỷ qua, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, quy hoạch toán học đã có những bước tiến lớn trong đó phải nói đến các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính gắn liền với tên tuổi của các nhà toán học như L.V. Kantorovich (1939), George Dantzig (1947), Lemke (1954), Leonid Khachian (1979), Karmarkar (1984), ...

Bài toán quy hoạch tuyến tính có hai dạng cơ bản là dạng chuẩn và dạng chính tắc, hai dạng này có quan hệ mật thiết với nhau. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính, còn bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán quy hoạch có miền ràng buộc là một hệ phương trình tuyến tính với các biến của nó có dấu không âm. Chúng ta đã biết, qua các phép biến đổi có thể dễ dàng đưa bài toán từ dạng chuẩn về dạng chính tắc, khi đó sẽ làm cho số chiều của bài toán tăng lên đáng kể nếu số ràng buộc bất phương trình tuyến tính của bài toán dạng chuẩn là lớn, vì phải thêm vào nhiều biến bù (để đưa các ràng buộc bất phương trình về phương trình).

Chính vì những lý do trên nên luận văn này trình bày phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn và thuật toán nón xoay tuyến tính giải cho lớp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu bị chặn gọi là thuật toán nón xoay MTBC, với cơ sở xuất phát ban đầu được nhận biết dễ dàng và trong trường hợp tổng quát có thể xuất phát từ gốc tọa độ là đỉnh của nón arctan dương hay từ véc tơ đơn vị. Hơn thế nữa, dù miền ràng buộc của bài toán bị thoái hoá cũng không ảnh hưởng đến tính hữu hạn bước lặp của phương pháp nón xoay. Các thuật toán nón xoay là các biến thể từ phương pháp nón-min giải bài toán quy hoạch gần lồi-gần lõm đề xuất trong cuốn

sách “Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính”([2]).

Luận văn gồm 3 chương:

- Chương 1 trình bày bài toán quy hoạch tổng quát, các khái niệm cơ bản về tập lồi và một số mô hình thực tế đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn cùng với một số phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính quen thuộc và thông dụng.
- Chương 2 trình bày những khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính, từ đó làm cơ sở lý thuyết cho việc xây dựng phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón-min của hàm mục tiêu bài toán.
- Chương 3 (dựa trên phương pháp nón xoay đề nghị trong chương 2) trình bày việc xây dựng thuật toán nón xoay MTBC giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu bị chặn và các ví dụ bằng số minh họa cho thuật toán, trong đó có thí dụ KLEE-MINTY với số chiều của bài toán là bất kỳ vẫn cho lời giải sau 1 bước lặp.
- Luận văn này hoàn thành dựa trên các cuốn sách “Quy hoạch gần lồi - gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính” ([2]) và cuốn “Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay” [1] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 05 năm 2013

Tác giả

Vi Tiến Dũng

Chương 1

Bài toán tối ưu tổng quát và một số mô hình bài toán thực tế

1.1 Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau:

Cực tiểu hóa (cực đại hóa) hàm:

$$f(x) \rightarrow \min(\max) \quad (1.1)$$

với các điều kiện :

$$g_i(x) (\leq, =, \geq) b_i, i = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

Bài toán (1.1) - (1.3) được gọi là một bài toán quy hoạch, hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x), i = 1, \dots, m$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc.

Tập hợp

$$D = \{x \in X | g_i(x) (\leq, =, \geq) b_i, i = 1, \dots, m\} \quad (1.4)$$

Một phương án $x^* \in D$ đạt cực tiểu (hay cực đại) của hàm mục tiêu, cụ thể là:

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$ {đối với bài toán *min*} và $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$ {đối với bài toán *max*} được gọi là phương án tối ưu (hay là lời giải) của bài toán. Khi đó $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

1.2 Một số mô hình thực tế

1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu phát biểu như sau :

Giả sử một xí nghiệp sản xuất n loại sản phẩm và sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau. Ta đưa vào các kí hiệu sau:

x_j là lượng sản phẩm loại j ($j = 1, \dots, n$) mà xí nghiệp sản xuất

c_j là tiền lãi (hay giá bán) đối với một đơn vị sản phẩm j ($j = 1, \dots, n$)

a_{ij} là suất chi phí tài nguyên loại i để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j

b_i là lượng dự trữ tài nguyên loại i ($i = 1, \dots, m$).

Trong các điều kiện đã cho, hãy xác định các giá trị $x_j, j = 1, \dots, n$ sao cho tổng tiền lãi (hay tổng giá trị sản lượng hàng hóa) là lớn nhất với số tài nguyên hiện có.

Mô hình toán học có dạng bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

1.2.2 Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (đánh số $i = 1, \dots, m$), lượng hàng hóa ở kho i là $a_i, i = 1, \dots, m$

Gọi kho i là điểm phát i

Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng trên (đánh số $j = 1, \dots, n$ với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là $b_j, j = 1, \dots, m$).

Gọi điểm tiêu thụ j là điểm thu j .

Gọi c_{ij} là cước vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm phát i đến điểm thu j . Hàng có thể chuyển từ điểm phát i bất kỳ đến điểm thu j bất kỳ. Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ các điểm phát tới các điểm thu sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất. Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ điểm phát i đến điểm thu j . Khi đó ta có mô hình toán học:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

với các điều kiện

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Ngoài ra còn có điều kiện thu phát:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

1.2.3 Bài toán cái túi

Một người du lịch muốn đem theo một cái túi nặng không quá b kilogram. Có n loại đồ vật mà anh ta dự định đem theo. Mỗi một đồ vật loại j có khối lượng a_j kilogram và giá trị c_j . Người du lịch muốn chắt vào túi các đồ vật sao cho tổng giá trị đồ vật đem theo là lớn nhất.

Ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ chắt vào túi. Ta có bài toán sau:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ x_j &\text{ nguyên}, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Đây là một bài toán quy hoạch nguyên.

1.3 Tập lồi đa diện

1. Định nghĩa

Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng gọi là tập lồi đa diện. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính :

$$\langle a^i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m (a^i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}) \quad (1.5)$$

Nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \leq b$ với A là một ma trận cấp $m * n$ và $b \in \mathbb{R}^m$.

Vì một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương bằng hai bất phương trình tuyến tính nên một tập lồi đa diện cũng là tập nghiệm của một hệ các phương trình và bất phương trình tuyến tính.

$$\langle a^i, x \rangle = b_i, i = 1, 2, \dots, p$$

$$\langle a^i, x \rangle \leq b_i, i = p + 1, \dots, m$$

Hạng của hệ bất phương trình tuyến tính (1.5) được định nghĩa bằng hạng của ma trận A . Nếu hạng của hệ này bằng m thì ta nói hệ độc lập tuyến tính.

Một tập lồi đa diện có thể không bị chặn (không giới nội). Một tập lồi đa diện mà đồng thời là một nón lồi (tương ứng với trường hợp $b = 0$) gọi là một nón lồi đa diện. Một tập lồi đa diện bị chặn còn được gọi là một đa diện lồi. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong \mathbb{R}^2 là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi.

Mỗi điểm cực biên của một tập lồi đa diện còn được gọi là một đỉnh của nó. Tập các đỉnh của C ký hiệu là $\overset{\circ}{C}$. Mỗi cạnh vô hạn của một tập lồi đa diện tương ứng với một phương cực biên của nó.

Cho tập lồi đa diện $D \neq \emptyset$ xác định bởi hệ bất phương trình tuyến tính (1.5). Khi đó mỗi bất phương trình (1.5) gọi là một ràng buộc của D . Ta nói điểm $x^o \in D$ thoả mãn chặt ràng buộc i^* nếu :

$$\langle a^{i^*}, x^o \rangle = b_{i^*}$$

Với mỗi $x \in D$ Ký hiệu

$$I(x) = \{i : \langle a^i, x \rangle = b_i\}$$