ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH XUÂN BẰNG

LÝ THUYẾT HÀM P-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐINH XUÂN BẰNG

LÝ THUYẾT HÀM P-ADIC

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên-2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tác giả luận văn

Đinh Xuân Bằng

Xác nhận **của khoa chuyên môn**	**Xác nhận** **của người hướng dẫn khoa học**

Hà Huy Khoái

// LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành nhờ sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy hướng dẫn GS.TSKH. Hà Huy Khoái. Thầy đã giành nhiều thời gian, công sức chỉ bảo tôi trong quá trình thực hiện đề tài và tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy cùng gia đình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại Học Sư Phạm Thái Nguyên, lãnh đạo khoa Toán, lãnh đạo khoa Sau Đại Học của trường đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn sự tận tâm và nhiệt tình của các quý thầy cô tham gia giảng dạy cho lớp cao học chuyên ngành Toán khóa 19.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn các bạn bè, những người thân yêu trong gia đình đã luôn cho tôi niềm tin và động lực để tôi học tập tốt.

Thái Nguyên, Tháng 6 Năm 2013

Học viên

Đinh Xuân Bằng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trong những năm gần đây, nhiều vấn đề quan trọng của lý thuyết hàm phức một biến được xem xét đối với các lớp hàm trên trường không Archimed. Bên cạnh nhiều tính chất tương tự, có nhiều tính chất là đặc thù của không gian hàm trên trường không Archimed.

Bản luận văn nhằm mục đích giới thiệu một số tính chất cơ bản của trường không Archimed và không gian các hàm chỉnh hình và phân hình trên đó. Những tính chất tương tự với hàm chỉnh hình và phân hình phức thường được chứng minh dựa vào tích phân Schnirelman, trong khi những tính chất đặc thù lại được thiết lập chủ yếu nhờ vào đa giác định giá của hàm chỉnh hình trên trường không Archimed.

Nội dung luận văn được trình bày dựa theo bài giảng “p-adic Function Theory” của W. Cherry, với một đôi chỗ chứng minh được chi tiết hóa (mà trong bài giảng được cho dưới dạng bài tập).

Luận văn gồm hai chương và phần tài liệu tham khảo.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Trường không Archimed

Định nghĩa: *Giả sử* A *là vành giao hoán. Giá trị tuyệt đối không Archimed* $|\ |$ *trên* A *là hàm từ* A *đến các số thực không âm* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *thỏa mãn ba tính chất sau:*

AV 1. $|a| = 0$ *khi và chỉ khi* $a = 0$.

AV 2. $|ab| = |a||b|$ *với mọi* $a, b \in \mathrm{A}$.

AV 3. $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ *với mọi* $a, b \in \mathrm{A}$.

Nhận xét 1.1.1. *Nếu* $|a| \neq |b|$, *thì* $|a+b| = \max\{|a|, |b|\}$

Chứng minh:

Theo định nghĩa trên ta có: $|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$.

Ta chứng minh $|a+b| \geq \max\{|a|, |b|\}$

Thật vậy:

Xét $|a| > |b|$. Ta có $|a| = |a+b-b| \leq \max\{|a+b|, |b|\}$ nên $|a| \leq |a+b|$.

Xét $|a| < |b|$. Ta có $|b| = |a+b-b| \leq \max\{|a+b|, |a|\}$ nên $|b| \leq |a+b|$.

Như vậy ta có $|a+b| \geq \max\{|a|, |b|\}$.

Vậy $|a+b| = \max\{|a|, |b|\}$

Ý nghĩa hình học: Nhận xét 1.1.1 có ý nghĩa là :

- Mỗi tam giác trong không gian không Archimed là cân.
- Mỗi điểm nằm trong hình cầu đều là tâm của nó.

Điều này có nghĩa là cứ hai đĩa tròn thì hoặc là chúng rời nhau hoặc đĩa này nằm trọn trong đĩa kia.

Nhận xét 1.1.2. *Nếu* $|\ |$ *là giá trị tuyệt đối không Archimed trên miền nguyên* A *thì* $|\ |$ *mở rộng duy nhất tới trường hữu tỉ của* A.

Kí hiệu: Cặp ($\mathbf{F}, |\ |$) bao gồm có trường $\mathbf{F}$ cùng với giá trị tuyệt đối không Archimed $|\ |$ trên $\mathbf{F}$ hoặc ta kí hiệu ngắn gọn bởi $\mathbf{F}$.

Định nghĩa (Tính liên tục của dãy). *Dãy a_n trong trường không Archimed* $\mathbf{F}$ *được gọi là hội tụ tới phần tử a trong* $\mathbf{F}$*, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, có tồn tại số tự nhiên N sao cho với mỗi số tự nhiên $n \geq N$, ta có $|a - a_n| < \varepsilon$.*

Định nghĩa (Dãy Cauchy của trường không Archimed). *Dãy a_n trong* $\mathbf{F}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, có tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên m và n; $m,n \geq \mathrm{N}$, thì $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Nhận xét 1.1.3. Giả sử **F** là trường không Archimed. Giả sử $\overline{\mathbf{F}}$ là tập của các dãy Cauchy trong **F** mà các dãy modulo hội tụ tới 0. Nói cách khác , định nghĩa quan hệ tương đương trên tập hợp của dãy Cauchy trong **F** bằng cách xác định hai dãy Cauchy là tương đương nếu hiệu của chúng là dãy hội tụ tới 0, và giả sử $\overline{\mathbf{F}}$ là tập hợp các lớp tương đương dưới quan hệ tương đương . Khi đó, $\overline{\mathbf{F}}$ là trường, và $|\ |$ là mở rộng một cách tự nhiên tới $\overline{\mathbf{F}}$, và rằng $\overline{\mathbf{F}}$ là trường không Archimed đầy đủ mà ta gọi bổ sung đầy đủ của **F**.

Cho trường **F**, $\mathbf{F}^{\times}$ kí hiệu cho $\mathbf{F} \setminus \{0\}$. Cho trường không Archimed (**F**, $|\ |$), tập hợp $|\mathbf{F}^{\times}| = \{|x| : x \in \mathbf{F}^{\times}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ là nhóm con với phép nhân của $\mathbb{R}_{>0}$ gọi là nhóm giá trị của **F**. Nếu $|\mathbf{F}^{\times}|$ là rời rạc trong $\mathbb{R}_{>0}$, thì **F** được gọi là trường không Archimed với giá trị tuyệt đối rời rạc .

Dưới đây chúng tôi sẽ đưa ra một vài ví dụ về trường không Archimed đầy đủ:

(i) Giá trị tuyệt đối tầm thường:

Giả sử **F** là trường. Giá trị tuyệt đối $|\ |$, được gọi là *giá trị tuyệt đối tầm thường trên* **F** nếu $|0| = 0$ *và* $|x| = 1$ với mọi $x \in \mathbf{F}^{\times}$. Khi đó, mọi dãy là Cauchy khi và chỉ khi từ lúc nào đó nó là hằng số, và do đó hội tụ. Như vậy một trường

F tùy ý có thể trở thành trường không Archimed đầy đủ bằng cách trang bị trên **F** một giá trị tuyệt đối tầm thường.

(ii) Các trường số p –Adic.

Xét các số hữu tỉ **Q** và giả sử p là số nguyên tố. Khi đó, một số x khác không trong **Q** có thể được viết duy nhất dưới dạng sau :

$$x = p^n \frac{a}{b}$$

ở đây p không chia hết a hoặc b.

Với $x \in \mathbf{Q}$ ta có: $|x|_p = \begin{cases} p^{-n} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

Ví dụ:

(1) Cho $p = 5$, $x = 45$.

Ta có $x = 5.9$ nên $|x|_p = 5^{-1} = 1/25$.

(2) Cho $p = 5$, $x = 22/2015$.

Ta có $x = 5^{-1} \cdot \left(\frac{22}{403}\right)$ nên $|x|_p = 5^1 = 5$.

(3) Cho $p = 5$, $x = 2013$.

Ta có $|x|_p = |2013|_5 = 1$.

Mệnh đề 1.1.4. *Hàm* $|\ |_p$ *là giá trị tuyệt đối không Archimed trên* **Q**.

Mệnh đề 1.1.5. *Giả sử* p *là số nguyên tố,* n_0 *là số nguyên dương sao cho với mọi số nguyên* $n \geq n_0$*, ta có* $0 \leq a_n \leq p-1$*. Khi đó, dãy tổng riêng* $S_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n p^n$ *là dãy Cauchy trong* $\left(\mathbf{Q}, |\ |_p\right)$*. Hơn nữa,* S_k *hội tụ trong* **Q** *nếu và chỉ nếu* a_n *từ một lúc nào đó là tuần hoàn , nói cách khác tồn tại số nguyên* n_1 *và* $t \geq 1$ *sao cho* $a_{n+t} = a_n$ *với mọi* $n \geq n_1$.

Chứng minh: Xem [24, § I .5.3].

Định nghĩa (Trường $\mathbf{Q}_p$): *Với số nguyên tố p, bổ sung đủ của $\mathbf{Q}$ theo tôpô sinh bởi giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ là một trường, kí hiệu là $\mathbf{Q}_p$.*

Giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ trên $\mathbf{Q}_p$, được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ trên $\mathbf{Q}$, thỏa mãn:

(1) $\mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{Q}_p$.

(2) $\mathbf{Q}_p$ là đầy đủ.

Trường $\mathbf{Q}_p$ được gọi là trường các số p-adic.

Định nghĩa (Trường $\mathbb{C}_p$): Bao đóng đại số của $\mathbf{Q}_p$ kí hiệu là $\bar{\mathbf{Q}}_p$, giá trị tuyệt đối trên $\bar{\mathbf{Q}}_p$ được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ trên $\mathbf{Q}_p$ và cũng kí hiệu là $|\ |_p$. Chú ý $\bar{\mathbf{Q}}_p$ không đầy đủ. Trường bổ sung đủ của $\bar{\mathbf{Q}}_p$ theo tôpô cảm sinh bởi giá trị tuyệt đối $|\ |_p$, kí hiệu là $\mathbb{C}_p$. Như vậy

(1) Tồn tại một phép nhúng $\bar{\mathbf{Q}}_p \to \mathbb{C}_p$ và giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ trên $\mathbb{C}_p$ nhận được bằng cách mở rộng giá trị tuyệt đối $|\ |_p$ trên $\bar{\mathbf{Q}}_p$.

(2) $\bar{\mathbf{Q}}_p$ trù mật trong $\mathbb{C}_p$.

(3) $\mathbb{C}_p$ là đầy đủ.

Trường $\mathbb{C}_p$ thỏa mãn ba điều kiện trên được gọi là trường các số phức p-adic. $\mathbb{C}_p$ đầy đủ, đóng đại số, có đặc số không.

1.2. Các hàm giải tích và hàm phân hình.

Giả sử $(\mathbf{F}, |\ |)$ là trường không Archimed, đầy đủ, đóng đại số.

Mệnh đề 1.2.1. *Chuỗi $\sum a_n$ các phần tử của $\mathbf{F}$ hội tụ nếu và chỉ nếu*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$