ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ HỒNG

TÍNH DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM NGUYÊN VỚI ĐẠO HÀM CHUNG NHAU MỘT GIÁ TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ HỒNG

TÍNH DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM NGUYÊN VỚI ĐẠO HÀM CHUNG NHAU MỘT GIÁ TRỊ

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên, năm 2013

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường ĐHSP-ĐHTN, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy đã tận tình hướng dẫn và tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường ĐHSP-ĐHTN, các thầy cô trong khoa Toán trường ĐHSP-ĐHTN, các thầy ở Viện Toán đã tạo điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành được luận văn này. Luận văn chắc chắn không tránh khỏi nhiều thiếu sót, rất mong được các thày cô và các bạn quan tâm, đóng góp để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tác giả

Dương Thị Hồng

Mục lục

Mở đầu

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh: *Cho hai hàm phân hình f và g. Nếu tồn tại năm giá trị phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho*

$$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j) \quad \text{với mọi } j = 1, 2, \ldots, 5$$

thì $f \equiv g$. Kết quả này cho thấy: một hàm phân hình phức được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược, không kể bội, của năm giá trị phân biệt. Công trình này của Ông được xem như khởi nguồn cho việc nghiên cứu sự xác định của các hàm hay ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn. Vấn đề này đã thu hút được sự quan tâm rất nhiều nhà toán học trên thế giới: H. Fujimoto, W. Stoll, L. Smiley, M. Ru, Z. Tu, C. C. Yang, G. Frank, M. Reinders, ... và thu được nhiều kết quả quan trọng.

Cho hai hàm phân hình khác hằng f, g. Ta kí hiệu $E(a, f)$ là tập các không điểm của $f(z) - a$, kể cả bội và $\overline{E}(a, f)$ là tập các không điểm của $f(z) - a$, không kể bội. Ta nói hai hàm f, g *chung nhau giá trị a IM (CM)* nếu $\overline{E}(a, f) = \overline{E}(a, g)$ (tương ứng $E(a, f) = E(a, g)$). Vấn đề đặt ra là khi hai hàm phân hình cùng với đạo hàm của chúng chung nhau một (hay một số) giá trị thì có quan hệ với nhau như thế nào.

Năm 1997, C.C Yang và H. X. Hua ([7]) đã chứng minh một kết quả đầu tiên về hàm nguyên chung nhau một giá trị. Các tác giả đã chứng minh: *Cho hai hàm nguyên khác hằng f, g và một số nguyên $n \geqslant 7$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ chung nhau giá trị 1 CM thì $f = dg$ với một bộ duy nhất gồm $(n+1)$ giá trị d hoặc $g(z) = c_1 e^{cz}, f(z) = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2 và c là các hằng số thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -1$.* Từ đó đến nay các kết quả của vấn đề này đã được xem xét bởi nhiều nhà toán học: năm 2000, Y. Xu và H. L. Qiu ([6]) đã xem xét lại kết quả của Yang-Hua trong trường hợp chung nhau giá trị 1 IM, năm 2002, M. L Fang ([2]) mở rộng kết quả của Yang-Hua cho đạo hàm bậc k. Năm 2008, J. F. Chen đã mở rộng các kết quả của Xu-Qiu và Fang. Gần đây, L. Xiuquing và L. Weichuan ([5]) đã chứng minh một số kết quả về hàm nguyên chung nhau một giá trị.

Luận văn **"Tính duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị"** là một trong những nghiên cứu theo hướng trên. Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả nghiên cứu về sự duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm bậc k có chung nhau một giá trị. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: *Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị*. Trong chương này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ sở trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình, cần thiết cho việc chứng minh những kết quả trong chương 2.

Chương 2: *Tính duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị*. Đây là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày lại kết quả nghiên cứu của L. Xiuquing và L. Weichuan được công bố [5].

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị

1.1 Các hàm đặc trưng và tính chất

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm về hàm nguyên và hàm phân hình. Cho f là một hàm xác định trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, lấy giá trị trên $\overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$ là một miền. Ta nói f *chỉnh hình* tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại một lân cận $U \subset D$ của z_0 sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

với mọi $z \in U$, trong đó $c_n \in \mathbb{C}$ là các hằng số. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình trên D* nếu nó chỉnh hình tại mọi $z \in D$.

Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu nó chỉnh hình trong miền D, trừ ra một số các điểm bất thường cực điểm.

Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$; $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* nếu nó phân hình trên $\mathbb{C}$.

Dễ thấy, nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì trong mỗi lân cận của $z \in D$ hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình.

Ta nhắc lại, điểm z_0 được gọi là $0-$điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0, hàm $f(z)$ có biểu diễn $f(z) = (z - z_0)^m.h(z)$, trong đó $h(z)$ chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$. Điểm z_0 được gọi là cực điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu z_0 là $0-$điểm cấp m của hàm

$\dfrac{1}{f(z)}$. Với hàm phân hình f, ta kí hiệu

$$\operatorname{ord}_f z_0 = \begin{cases} m & \text{nếu } z_0 \text{ là } 0-\text{điểm cấp } m \text{ của } f(z) \\ 0 & \text{nếu } f(z_0) \neq 0, \infty \\ -m & \text{nếu } z_0 \text{ là cực điểm cấp } m \text{ của } f(z). \end{cases}$$

Dế thấy, nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì $f'(z)$ cũng là hàm phân hình trên D. Hàm $f(z)$ và $f'(z)$ có cùng cực điểm, đồng thời, nếu z_0 là cực điểm cấp $m \geqslant 0$ của $f(z)$ thì nó là cực điểm cấp $m+1$ của $f'(z)$. Hơn nữa, hàm $f(z)$ có không quá đếm được các cực điểm trên D.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng Nevanlinna của một hàm phân hình. Với mỗi số thực dương $x \in \mathbb{R}_+^*$, kí hiệu

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{nếu } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } x < 1. \end{cases} = \max\{\log x, 0\}.$$

Dễ thấy $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Hàm

$$m(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm phân hình f.

Ta biết, với hàm phân hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, với một số thực $R > 0$ ta có:

$$\log |f(Re^{i\varphi})| = \log^+ |f(Re^{i\varphi})| - \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\varphi})|}$$

nên

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi = m(R, f) - m(R, 1/f).$$

Kí hiệu $n(t, f)$ là số cực điểm kể cả bội của hàm $f(z)$ trong đĩa $\{|z| < t\}$ và $n(0, f) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, f)$.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho f là hàm phân hình và R là một số thực dương. Nếu $f(0) \neq \infty$ thì*

$$\int\limits_0^R \log \frac{R}{t} dn\,(t, f) = \sum_{\nu=1}^{N} \log \left| \frac{R}{b_\nu} \right|,$$

trong đó $b_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, N$, là các cực điểm của hàm f trong đĩa $\{|z| < R\}$.

Chứng minh. Trước hết, bằng phương pháp tích phân từng phần ta có:

$$\int\limits_0^R \log \frac{R}{t} dn\,(t, f) = \log \frac{R}{t}.n\,(t, f)\Big|_0^R - \int\limits_0^R n\,(t, f)\, d \log \frac{R}{t}$$
$$= \int\limits_0^R n\,(t, f) \frac{dt}{t}.$$

Do hàm f chỉ có hữu hạn cực điểm trong $\{|z| < R\}$ nên hàm $n(t, f)$ chỉ nhận một số hữu hạn giá trị nguyên không âm và tăng theo t. Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in \{|b_\nu|, \nu = 1, \ldots, N\}$ và r_0, r_n là các số thực không âm sao cho $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n = R$ và trên mỗi hình vành khăn $\{r_j < |z| < r_{j+1}\}$ hàm $n(t, f)$ không đổi. Khi đó

$$\int\limits_0^R n\,(t, f) \frac{dt}{t} = \int\limits_{r_0}^{r_1} n\,(t, f)\, \frac{dt}{t} + \int\limits_{r_1}^{r_2} n\,(t, f)\, \frac{dt}{t} + ... + \int\limits_{r_{n-1}}^{r_n} n\,(t, f)\, \frac{dt}{t}.$$

Giả sử

$$n(t, f) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \leqslant r_1 \\ \alpha_1 & \text{nếu } r_1 < t \leqslant r_2 \\ \cdots & \\ \alpha_{n-1} = N & \text{nếu } r_{n-1} < t \leqslant r_n = R. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} &= \int\limits_{r_0}^{r_1} 0.\frac{dt}{t} + \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha_1.\frac{dt}{t} + \cdots + \int\limits_{r_{n-1}}^{r_n} \alpha_{n-1}.\frac{dt}{t}\\ &= \alpha_1 \log t \Big|_{r_1}^{r_2} + \alpha_2 \log t \Big|_{r_2}^{r_3} + ... + \alpha_{n-1} \log t \Big|_{r_{n-1}}^{R}\\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \log \frac{R}{r_\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} \log \frac{R}{|b_\nu|}.\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh □

Định nghĩa 1.1.3. Hàm $N(R,f) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \log \frac{R}{|b_\nu|}$ được gọi là *hàm đếm* (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm) của hàm f. Hàm

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f)$$

được gọi là *hàm đặc trưng* của hàm f (còn được gọi là hàm đặc trưng Nevanlinna).

Bây giờ ta xem xét một số tính chất của các hàm đếm, xấp xỉ và hàm đặc trưng. Sử dụng tính chất

$$\log^+ \left|\prod_{i=1}^{K} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{K} \log^+ |a_i|$$

và

$$\log^+ \left|\sum_{i=1}^{K} a_i\right| \leqslant \log^+ \left(K \max_{1\leqslant i \leqslant K} \{|a_i|\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{K} \log^+ |a_i| + \log K,$$

với $a_1, \ldots, a_K$ là các số phức, áp dụng cho các hàm phân hình f_j, $j = 1, \ldots, p$, ta thu được: