ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TÂM

TẬP HÚT LÙI ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ TÂM

TẬP HÚT LÙI ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Đình Bình

Thái Nguyên, năm 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của T.S Nguyễn Đình Bình. Các kết quả được phát biểu trong Luận văn là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Tác giả

Dương Thị Tâm

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và nhiệt tình chỉ bảo của Tiến sĩ Nguyễn Đình Bình, Bộ Khoa học và Công nghệ. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và lòng quý mến đối với thầy.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Khoa Sau đại học, Khoa Toán trường Đại học sư phạm- Đại học Thái Nguyên, Trung tâm học liệu - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình tác giả học tập tại trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K19 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn giúp tác giả hoàn thành luận văn này.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2013

Tác giả

Dương Thị Tâm

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử phát triển và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lí, hóa học và sinh học, chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt và khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hóa học, các mô hình quần thể trong sinh học,...Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Các vấn đề đặt ra là nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán (sự tồn tại duy nhất nghiệm, sự phụ thuộc liên tục của nghiệm theo dữ kiện đã cho) và các tính chất định tính của nghiệm (tính trơn, dáng điêu tiệm cận của nghiệm,...).

Sau khi nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng rất quan trọng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đạt được kết quả mong muốn. Về mặt toán học, điều này làm nảy sinh một hướng nghiên cứu mới, được phát triển mạnh mẽ trong khoảng ba thập kỉ gần đây là Lí thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều. Lí thuyết này nằm ở giao của 3 chuyên ngành là Lí thuyết hệ động lực, Lí thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và Lí thuyết phương trình vi phân thường (xem Bảng phân loại toán học năm 2010). Bài toán cơ bản của lí thuyết này là nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất cơ bản của tập hút, chẳng hạn đánh giá số chiều fractal hoặc số chiều Hausdorff, sự phụ thuộc liên tục của tập hút theo tham biến, tính trơn của tập hút, xác định các modes,... Tập hút toàn cục cổ điển là một tập compact, bất biến, hút tất cả các quỹ đạo của hệ và chứa đựng nhiều thông tin về dáng điệu tiệm cận của hệ. Cụ thể với mỗi quỹ đạo cho trước của hệ và một khoảng thời gian T tùy ý, ta đều tìm được một quỹ đạo nằm trên tập hút toàn cục mà dáng điệu khi thời gian đủ lớn của hai quỹ đạo này sai khác đủ nhỏ trên một khoảng có độ dài T. Tuy nhiên, tập hút toàn cục chỉ áp dụng cho các trường hợp ôtônôm, trong khi rất nhiều quá trình có ngoại lực phụ thuộc vào thời gian. Do đó cần phải mở rộng khái niệm tập hút cho các hệ động lực không ôtônôm. Việc mở rộng nghiên cứu về tập hút đã dẫn đến khái niệm tập hút đều cho trường hợp quỹ đạo nghiệm bị chặn khi thời gian t tiến ra vô hạn, và sau đó là khái niệm tập hút lùi cho trường hợp quỹ đạo nghiệm bất kì khi thời gian t tiến ra vô hạn.

Trong ba thập kỉ gần đây, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và thu được nhiều kết quả về lí thuyết tập hút đối với nhiều lớp phương trình vi phân đạo hàm riêng (xem,chẳng hạn, cuốn chuyên khảo [3] và bài tổng quan [2]). Một trong những lớp phương trình đạo hàm riêng được nghiên cứu nhiều nhất là lớp phương trình parabolic. Lớp phương trình này mô tả nhiều quá trình trong vật lí, hóa học và sinh học như quá trình truyền nhiệt, quá trình phản ứng khuếch tán, mô hình toán học trong sinh học quần thể,...

Sự tồn tại tập hút toàn cục đối với phương trình và hệ phương trình parabolic nửa tuyến tính không suy biến đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem [7], [11]). Tính liên tục của tập hút toàn cục đối với các bài toán parabolic được nghiên cứu trong các công trình [2], [6], [7], [10]. Trong những năm gần đây, sự tồn tại tập hút lùi đã được chứng minh cho phương trình parabolic với điều kiện biên phi tuyến ([4], [5], [12]), phương trình parabolic với điều kiện biên động lực [13]. Cho đến nay, các kết quả về lí thuyết tập hút lùi đối với phương trình parabolic không suy biến rất phong phú và khá hoàn thiện. Tuy nhiên, các kết quả tương ứng trong trường hợp phương trình phi tuyến vẫn còn rất ít.

Việc nghiên cứu sự tồn tại và tính chất của tập hút đối với những lớp phương trình parabolic phi tuyến là những vấn đề thời sự, có ý nghĩa khoa học và hứa hẹn có nhiều ứng dụng trong các bài toán thực tế.

Với những lí do ở trên, chúng tôi lựa chọn vấn đề chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu và chứng minh sự tồn tại tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến làm nội dung nghiên cứu của Luận văn với tên gọi là *"Tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến"*.

2. Phương pháp nghiên cứu

• Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu: sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với các bổ đề compact (thường được gọi là phương pháp compact trong tài liệu).

• Chứng minh sự tồn tại tập hút: sử dụng các phương pháp của lí thuyết hệ động lực vô hạn chiều, nói riêng là phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

3. Mục đích của luận văn

Trong luận văn này, tác giả nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu và sự tồn tại tập hút lùi đối với một lớp phương trình parabolic phi tuyến chứa toán tử Grushin trong miền bị chặn.

- Nghiên cứu bài toán:

$$\begin{cases} u_t - G_s u + f(u) = g(t,x), \quad (t,x) \in Q_{\tau,T} = (\tau, T] \times \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t \in (\tau, T], \\ u(x,\tau) = u_\tau(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

trong đó

$$G_s u = \Delta_{x_1} u + |x_1|^{2s} \Delta_{x_2} u, \ \ x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, s \geq 0,$$

là toán tử Grushin, $u_\tau \in L^2(\Omega)$.

Đối với bài toán này, chúng tôi nghiên cứu:

- Chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (2.1).

- Chứng minh sự tồn tại tập hút lùi trong không gian $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.

4. Bố cục của Luận văn

Luận văn bao gồm: Mở đầu, ba chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trình bày các khái niệm và kết quả tổng quát về tập hút lùi toàn cục, tập hút đều và tập hút lùi, các kết quả về không gian hàm và toán tử được sử dụng trong luận văn và một số kiến thức bổ trợ khác.

Chương 2. Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán.

Chương 3. Chứng minh sự tồn tại tập hút lùi trong $S_0^2(\Omega) \cap L^{2p-2}(\Omega)$.