ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CAO DUY HÙNG

QUAN HỆ GIỮA TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC VÀ TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC ĐẠO HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CAO DUY HÙNG

QUAN HỆ GIỮA TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC VÀ TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC ĐẠO HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 60 46 0102

Giáo viên hướng dẫn:
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN, 2013

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên. Qua đây tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo Khoa Toán, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo nhà trường đã trang bị kiến thức cơ bản và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS. TS. Tạ Duy Phượng, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Mục lục

MỞ ĐẦU

Ta đã biết Định lí Gauss-Lucas về quan hệ giữa nghiệm của đa thức và đa thức đạo hàm sau đây.

Định lí Gauss-Lucas: *Giả sử $P(z)$ là một đa thức với các hệ số phức. Khi ấy mọi nghiệm của đa thức đạo hàm $P'(z)$ đều nằm trong bao lồi của tập các điểm nghiệm của đa thức.*

Không hạn chế tổng quát, có thể coi tất cả các nghiệm của đa thức $P(z)$ nằm trong hình tròn đơn vị đóng $\overline{D}(0,1)$. Khi ấy theo Định lí Gauss-Lucas, mọi nghiệm của đa thức đạo hàm $P'(z)$ cũng nằm trong hình tròn đóng $\overline{D}(0,1)$. Do vậy, khoảng cách lớn nhất giữa một điểm nghiệm của đa thức và một điểm nghiệm của đa thức đạo hàm không vượt quá 2.

Năm 1958, nhà toán học Bugaria Blagovest Sendov đã phát biểu giả thuyết sau.

Giả thuyết Sendov: *Giả sử tất cả các nghiệm z_i, $i = 1, ..., n$ của đa thức $P(z)$ nằm bên trong hình tròn đơn vị đóng $\overline{D}(0,1)$ trong mặt phẳng phức. Khi ấy mỗi hình tròn đóng có bán kính bằng 1, tâm tại điểm nghiệm z_i đều chứa một điểm nghiệm của đa thức đạo hàm.*

Giả thuyết Sendov được sự quan tâm của rất nhiều nhà toán học trên thế giới. Sau 50 năm, đã có hơn 100 bài báo viết về giả thuyết này xem [2]. Năm 1999, giả thuyết Sendov đã được J. E. Brown và học trò của Ông, G. Xiang chứng minh cho các đa thức bậc không vượt quá 8. Cho đến nay, kỉ lục này vẫn được giữ.

Nhằm chứng minh giả thuyết Sendov, nhiều nhà toán học đã sử dụng nhiều công cụ và kĩ thuật chứng minh khác nhau. Nhiều giả thuyết mới liên quan đến giả thuyết Sendov được phát biểu.

Hình học của đa thức tỏ ra khá hữu hiệu trong cố gắng chứng minh giả thuyết Sendov. Thực chất của giả thuyết Sendov là đánh giá khoảng cách Hausdorff giữa tập nghiệm của đa thức và tập nghiệm của đa thức đạo hàm. Nói cách khác, giả thuyết Sendov được chứng minh nếu khoảng cách Hausdorff giữa tập nghiệm của đa thức và tập nghiệm của đa thức đạo hàm không vượt quá 1.

Ngoài ra, nhờ sử dụng khoảng cách Hausdorff giữa các tập hợp, ta có thể mở rộng giả thuyết Sendov khi xét khoảng cách Hausdorff giữa các tập khác nhau, thí dụ, khoảng cách Hausdorff giữa tập nghiệm của đa thức và tập nghiệm của đa thức đạo hàm bậc k, hoặc khoảng cách giữa bao lồi của tập nghiệm đa thức và bao lồi của tập nghiệm đa thức đạo hàm.

Theo chúng tôi, đây là một giả thuyết thú vị, có quan hệ mật thiết giữa toán sơ cấp và toán cao cấp. Vì vậy tôi chọn đề tài này làm đề tài luận văn cao học.

Luận văn gồm hai Chương. Chương 1 giới thiệu tổng quan về lịch sử Giả thuyết Sendov và các kết quả đạt được trong nghiên cứu giả thuyết này. Chương 2 trình bày cách tiếp cận *hình học của đa thức* trong nghiên cứu giả thuyết Sendov, chủ yếu dựa theo tài liệu [27] và [22]. Nhiều giả thuyết mới cũng được trình bày.

Luận văn cũng trình bày các chứng minh giả thuyết Sendov cho các đa thức bậc thấp (bậc không vượt quá 5). Mặc dù còn sơ lược và chưa đầy đủ, chúng tôi hy vọng luận văn trình bày được những nội dung cơ bản của giả thuyết Sendov và thu hút sự quan tâm đến giả thuyết này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 04 năm 2013

Người thực hiện

Cao Duy Hùng

Chương 1

Giới thiệu giả thuyết Sendov

1.1 Phát biểu giả thuyết Sendov

1.1.1 Định lý Gaus-Lucas

Ta đã biết Định lý Rolle quen thuộc và quan trọng sau đây

Định lý 1.1. (Rolle, 1691) *Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi trên đoạn $[a; b] \subset \mathbb{R}$ và $f(a) = f(b)$. Khi ấy tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Từ định lý Rolle ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1. *Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ có tất cả m nghiệm thực $x_1 < x_2 < ... < x_m$. Khi ấy đa thức đạo hàm*

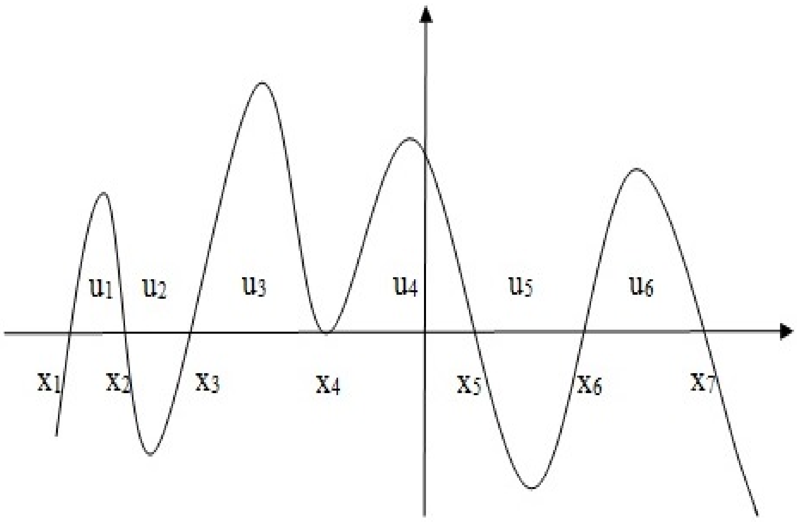
$$P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2x + a_1$$

có không ít hơn $m - 1$ nghiệm thực, trong đó $u_1 < u_2 < ... < u_{m-1}$ sao cho

$$x_1 < u_1 < x_2 < u_2 < x_3 < u_3 < ... < x_{m-1} < u_{m-1} < x_m.$$

Chú ý 1.1. Trong số các nghiệm thực x_i có thể có các nghiệm bội tức là đồ thị hàm số $y = P(x)$ cắt hoặc tiếp xúc với trục hoành tại một số điểm $x_j,\ j \in \{1, ..., m\}$

Hình 1.1. Minh họa cho Hệ quả 1.1



Hình 1.1:

Ta thấy rằng, khoảng cách nhỏ nhất từ nghiệm u_i , $i = 1, ..., m-1$ của đa thức đạo hàm $P'(x)$ để hai nghiệm gần nó nhất của đa thức $P(x)$ bao giờ cũng nhỏ hơn một nửa khoảng cách giữa hai nghiệm ấy, tức là

$$\min\{u_i - x_i; x_{i+1} - u_i\} \le \frac{x_{i+1} - x_i}{2},\ i = 1, ...m-1.$$

Coi khoảng cách lớn nhất giữa hai nghiệm liên tiếp của đa thức không vượt quá 2, thì giữa hai nghiệm liên tiếp luôn tồn tại ít nhất một nghiệm của đạo hàm có khoảng cách tới ít nhất một nghiệm của đa thức không vượt quá 1.

Nhận xét 1.1. Điều kiện số nghiệm $m \ge 2$ của đa thức $P(x)$ là quan trọng.
Ví dụ, đa thức

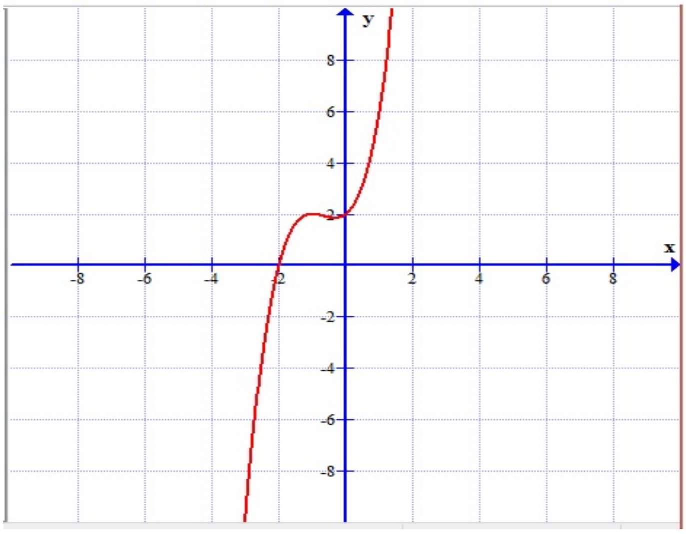
$$P(x) = (x+2)\left(x^2+1\right) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

có duy nhất một nghiệm thức $x = -2$ nhưng đa thức đạo hàm

$$P'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = (x+1)(3x+1)$$

có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{1}{3}$ không trùng với (không nằm trong khoảng) $x = -2$.

Hình 1.2. Minh họa cho Nhận xét 1.1



Hình 1.2:

Nhận xét 1.2. Đạo hàm $P'(x)$ có thể có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng hai nghiệm của $P(x)$.
Ví dụ, đa thức

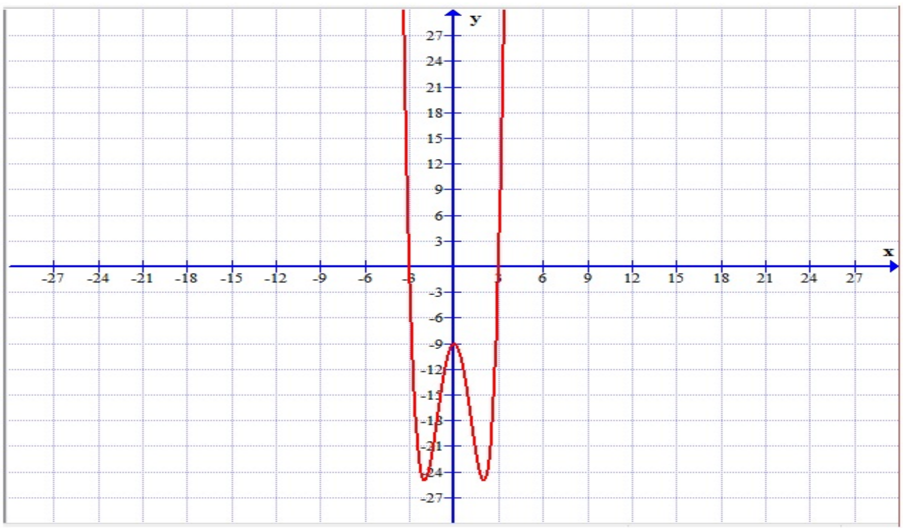
$$P(x) = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 1\right) = x^4 - 8x^2 - 9$$

có hai nghiệm $x_{1,2} = \pm 3$, nhưng đa thức đạo hàm

$$P'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right)$$

có ba nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$ và $x_3 = 2$ trong khoảng $(-3;\ 3)$

Hình 1.3. Minh họa cho Nhận xét 1.2



Hình 1.3: