ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THANH SƠN

ĐỘ NHẠY NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH Nguyễn Xuân Tấn

Thái Nguyên - Năm 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan: Bài luận văn tốt nghiệp này là công trình nghiên cứu thực sự của cá nhân tôi, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu lý thuyết, nghiên cứu khảo sát và phân tích từ thực tiễn dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn.

Tôi xin cam đoan rằng số liệu và kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn là hoàn toàn trung thực và chưa được sử dụng để bảo vệ cho một học vị nào, phần trích dẫn và tài liệu tham khảo đều được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày..... tháng ..... năm 2013

Tác giả

Lê Thanh Sơn

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của thầy giáo GS.TSKH Nguyễn Xuân Tấn, nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn đối với các thầy giáo, cô giáo ở Viện Toán học và Phòng quản lý đào tạo sau đại học cùng toàn thể các thầy giáo, cô giáo của trường ĐHSP Thái Nguyên.

Tôi xin chân thành cảm ơn Phòng GD&ĐT Sông Lô, Trường THCS Lãng Công đã tạo điều kiện về thời gian để có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn các bạn học viên đã chia sẻ cùng tôi những khó khăn trong những năm tháng học tập xa nhà.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết bất đẳng thức biến phân ra đời cách đây hơn 50 năm với các công trình quan trọng của G. Stampacchia, P. hartman, G. Fichera, J. L. Lions và F. E. Browder. Trong suốt hơn 50 năm qua, lý thuyết này đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Có rất nhiều bài báo, rất nhiều cuốn sách đề cập đến các bất đẳng thức biến phân và ứng dụng của chúng. Hiện nay những bài toán phụ thuộc tham số đang được các nhà toán học và các nhà khoa học khác quan tâm nghiên cứu rất nhiều và có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực.

Giả sử K là một tập lồi đóng trong không gian định chuẩn X, $f: K \to X^*$ là ánh xạ đơn trị từ K vào không gian đối ngẫu X^* của X. Bài toán " Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho $\langle f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K$" được gọi là bất đẳng thức biến phân xác định bởi toán tử f trên tập K. Nếu $F: K \to 2^{X^*}$ là một ánh xạ đa trị từ K vào X^* thì bài toán " Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho tồn tại $x^* \in F(\bar{x})$ thỏa mãn $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $x \in K$" được gọi là bất đẳng thức biến phân suy rộng xác định bởi tập K và toán tử F.

Khi toán tử $f(F)$ phụ thuộc tham số μ và tập hạn chế K phụ thuộc tham số λ nào đó thì bài toán trên được gọi là bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số (bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số, tương ứng). Ở đây (μ, λ) là cặp tham số của bài toán.

Bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số và bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số, cùng với các ứng dụng khác nhau của chúng là nội dung chính của luận văn này. Tương tự như trong nhiều lĩnh vực toán học khác, các vấn đề chủ yếu được nghiên cứu trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân là sự tồn tại nghiệm, tính liên tục của tập nghiệm theo tham số, và các thuật toán tìm nghiệm.

Để tiện theo dõi luận văn này, ta nhắc lại kết quả trong $[14]$:

Giả sử H là không gian Hilbert thực, M và Λ là hai tập tham số khác rỗng lấy trong hai không gian định chuẩn nào đó, $f: H \times M \to H$ là ánh xạ đơn trị, $K: \Lambda \to 2^H$ là ánh xạ đa trị nhận giá trị là các tập lồi, đóng, khác rỗng. Xét bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\lambda) \text{ sao cho} \\ \langle f(x,\mu), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(\lambda), \end{cases} \qquad (0.1)$$

ở đó $(\mu,\lambda) \in M \times \Lambda$ là cặp tham số của bài toán và $\langle \cdot,\cdot \rangle$ là ký hiệu tích vô hướng trong H. Với cặp tham số $(\bar{\mu},\bar{\lambda}) \in M \times \Lambda$ cho trước, ta có thể xem (0.1) như một bài toán nhiễu của bất đẳng thức biến phân sau đây:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\bar{\lambda}) \text{ sao cho} \\ \langle f(x,\bar{\mu}), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K(\bar{\lambda}). \end{cases} \qquad (0.2)$$

Giả sử $\bar{x}$ là một nghiệm của (0.2). Chúng ta cần biết xem liệu (0.1) có thể cónghiệm $x = x(\mu,\lambda)$ ở gần $\bar{x}$ khi (μ,λ) ở gần $(\bar{\mu},\bar{\lambda})$ hay không, và hàm $x(\mu,\lambda)$ có dáng điệu như thế nào. Nói cách khác là ta cần nghiên cứu độ nhạy của nghiệm $\bar{x}$ đối với sự thay đổi của (μ,λ).

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn này là trình bày một số kết quả về độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng có phụ thuộc tham số trong không gian Banch phản xạ và một số áp dụng để khảo sát độ nhạy nghiệm của bài toán quy hoạch lồi phụ thuộc tham số.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ sau đây:

Trình bày kiến thức cơ bản.

Trình bày độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng.

Trình bày tính liên tục Holder của nghiệm bài toán biến phân phụ thuộc tham số.

3. Bố cục luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương.

Chương 1 kiến thức chuẩn bị. Trong đó mục 1.1 trình bày các không gian thường dùng. Mục 1.2 trình bày ánh xạ đa trị. Mục 1.3 nhắc lại bài toán tối ưu.

Chương 2 nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng. Trong đó, Mục 2.1 trình bày các ký hiệu và khái niệm liên quan đến bất đẳng thức biến phân. Mục 2.2 trình bày một số sự kiện về toán tử đơn điệu cực đại. Mục 2.3 thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục tựa Holder của ánh xạ nghiệm của bất đẳng thức biến phân suy rộng, Mục 2.4 đề cập tới một số trường hợp riêng. Mục 2.5 được dành cho việc áp dụng các kết quả thu được trong các mục trước để nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bài toán quy hoạch lồi có tham số.

Chương 3 nghiên cứu các tính chất liên tục kiểu Lipschitz-Holder của nghiệm các bài toán biến phân phụ thuộc tham số. Mục 3.1 trình bày bài toán và các bổ đề bổ trợ. Mục 3.2 thiết lập một số kết quả về tính liên tục Lipschitz và tính đơn điệu mạnh của toán tử đạo hàm. Mục 3.3 trình bày chứng minh định lý chính của chương này. Bằng cách sử dụng các kết quả của chương 2 và các mục 3.1 và 3.2, chúng ta có được kết quả về tính chất liên tục kiểu Lipschitz-Holder của ánh xạ nghiệm theo tham số.

Chương I
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng ta sẽ nhắc lại một số kiến thức cơ bản để sử dụng trong suốt luận văn này.

1.1. Các không gian thường dùng

1.1.1. Không gian Metric.

Định nghĩa 1.1. $\left(\left[4, p.33\right]\right)$ Một tập hợp X được gọi là một không gian metric nếu: a) Với mỗi cặp phần tử x, y của X đều có xác định, theo một quy tắc nào đó, một số thực $\rho\left(x, y\right)$; b) Qui tắc nói trên thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $\rho\left(x, \mathrm{y}\right) > 0$ nếu $x \neq y$;

   $\rho\left(x, \mathrm{y}\right) = 0$ nếu $x = y$ (tính tự phản xạ),

2. $\rho\left(x, \mathrm{y}\right) = \rho\left(y, x\right)$ với mọi x, y (tính đối xứng),

3. $\rho\left(x, \mathrm{y}\right) \leq \rho\left(x, z\right) + \rho\left(\mathrm{z}, \mathrm{y}\right)$ với mọi x, y, z (bất đẳng thức tam giác).

Hàm số $\rho\left(x, \mathrm{y}\right)$ gọi là metric của không gian và cặp $\left(X, \rho\right)$ được gọi là không gian metric.

Ví dụ. 1) Một tập M bất kỳ của đường thẳng R, có khoảng cách thông thường $\rho\left(x, \mathrm{y}\right) = \left|x - y\right|$ (độ dài đoạn nối x và y), là một không gian metric.

2) Tổng quát hơn, trong không gian k chiều R^k, có thể xác định khoảng cách giữa hai điểm $x = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\right)$ và $y = \left(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k\right)$ là :

$$\rho\left(x, y\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i - \eta_i\right)^2}$$

là không gian metric.

Trong không gian metric, nhờ có khoảng cách, nên có thể định nghĩa:

1) Sự hội tụ. Ta nói một dãy điểm $x_1, x_2, ...$ của một không gian metric X hội tụ tới điểm x của không gian đó nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Ta viết $x_n \to x$ hoặc $\lim x_n = x$, và điểm x gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

2) Lân cận. Một hình cầu tâm a, bán kính $r(0 < r < +\infty)$, trong một không gian metric X, là tập: $B(a,r) = \{x : \rho(x,a) < r\}$.

Hình cầu tâm a, bán kinh r, cũng gọi là một r- lân cận của điểm a và mọi tập con của X bao hàm một r- lân cận nào đó của điểm a gọi là một lân cận của điểm a.

Điểm trong: điểm x gọi là một điểm trong của tập A nếu có một lân cận của x nằm trong tập A.

3) Tập mở. Một tập là mở nếu mọi điểm thuộc nó đều là điểm trong.

4) Tập đóng. Một tập là đóng nếu mọi điểm không thuộc nó đều là điểm trong của phần bù của nó.

Bốn khái niệm trên có mối quan hệ mật thiết với nhau: ba khái niệm còn lại đều suy ra từ một khái niệm cho trước và chúng cùng sinh ra trên tập X một cấu trúc, cấu trúc này được gọi là cấu trúc tôpô.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy Cauchy nếu $\rho(x_n, x_m) \to 0$ khi $n,m \to \infty$. Không gian metric mà mọi dãy Cauchy đều hội tụ thì được gọi là không gian metric đủ.

Bao đóng: Giả sử A là tập con của X. Giao của tất cả các tập hợp đóng chứa A gọi là bao đóng của tập hợp A và ký hiệu $\overline{A}$.

Từ định nghĩa lân cận ta có các định nghĩa sau: Với $a \in X$, $\rho > 0, \rho \in X$.

Tập: $B(a,\rho) = \{x \in X : \rho(a,x) < \rho\}$, gọi là hình cầu mở tâm a, bán kính ρ.

Tập: $\overline{B}(a,\rho) = \{x \in X : \rho(a,x) \le \rho\}$, gọi là hình cầu đóng tâm a, bán kính ρ.

Hình cầu đơn vị đóng trong X được ký hiệu $\overline{B}_X$.